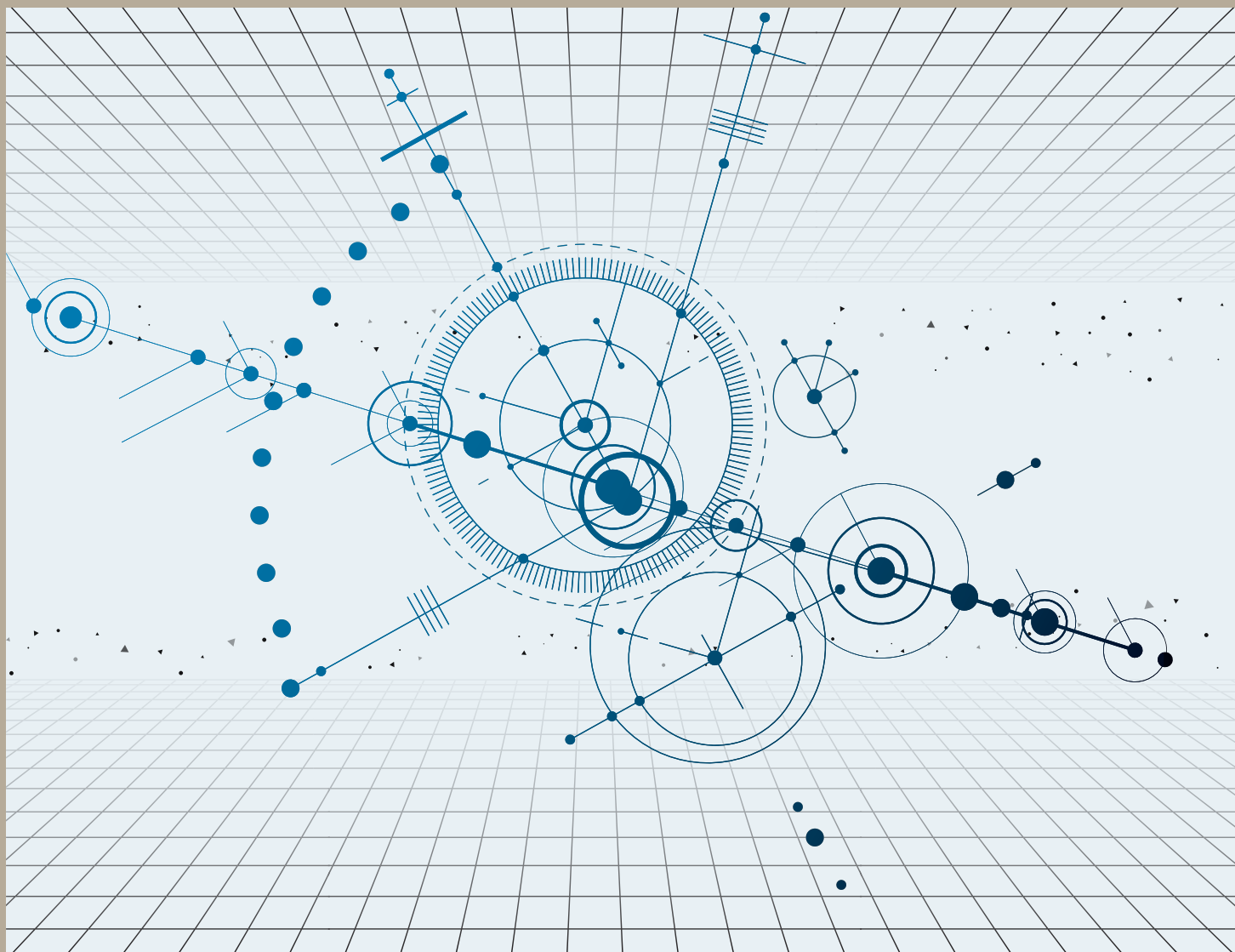




# מתמטיקה קדם אקדמית

כרך א

גיל אלון

**מתמטיקה קדם אקדמית** גיל אלון



## מתמטיקה קדם אקדמית

כרך א

שיעורים 1-4

גיל אלון

# *Basics of Mathematics*

Vol. 1

## צוות הפיתוח

### כתיבה:

ד"ר גיל אלון

### עריכה: אסנת אפרת

### הגהה: דפי בר אילן

### עימוד: דלית סלומון

### עיצוב עטיפה: יעל עינת-ארדיטי

### איור: רונית בורלא

### זכויות יוצרים: אלכס ריפ

תמונות העטיפה: Svixx / Sylverarts Vectors / Shutterstock

מק"ט 95003-2011

ISBN 978-965-06-1715-8

© תשפ"ד - 2024. כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

למדה - ספרי האוניברסיטה הפתוחה, הקריה ע"ש דורותי דה רוטשילד, דרך האוניברסיטה 1, ת"ד 808, רעננה 4353701.

Lamda - The Open University Books, The Dorothy de Rothschild Campus, 1 University Road, P.O.Box 808, Raanana 4353701. Printed in Israel.

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי, מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה. שימוש מסחרי בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט, אלא ברשות מפורשת ובכתב ממדור זכויות יוצרים של האוניברסיטה הפתוחה.



## תוכן עניינים לכרך א

|    |                                         |
|----|-----------------------------------------|
| 7  | פתח דבר                                 |
| 9  | <b>שיעור 1: אריתמטיקה</b>               |
| 9  | מספרים טבעיים                           |
| 9  | פעולת החיבור                            |
| 10 | פעולת הכפל                              |
| 12 | סדר הפעולות בביטויים הכוללים חיבור וכפל |
| 12 | סוגריים                                 |
| 13 | חוקי החילוף והקיבוץ                     |
| 16 | פעולת החיסור                            |
| 17 | מספרים שליליים                          |
| 19 | הערך המוחלט                             |
| 20 | פעולות המערבות מספרים שליליים           |
| 23 | פעולת החילוק                            |
| 25 | חילוק עם שארית                          |
| 27 | שברים                                   |
| 28 | הרחבה של שברים                          |
| 29 | צמצום שברים                             |
| 30 | חיבור שברים                             |
| 31 | חיבור שברים בעלי מכנים שונים            |
| 35 | שברים פשוטים ומדומים                    |
| 36 | הצגת שבר מדומה כמספר מעורב או שלם       |
| 37 | הצגת מספר מעורב או שלם כשבר מדומה       |
| 38 | הצגת שברים על פני ציר המספרים           |
| 39 | שברים שליליים                           |
| 40 | חיסור שברים                             |
| 41 | חיבור וחיסור הכולל שברים שליליים        |
| 42 | כפל שברים                               |
| 44 | המספר ההופכי                            |
| 45 | חילוק שברים                             |
| 46 | סיכום – ארבע פעולות החשבון              |
| 47 | העלאה בריבוע                            |
| 48 | פעולת החזקה                             |
| 50 | ההצגה העשרונית                          |
| 51 | שברים עשרוניים                          |
| 52 | אחוזים                                  |
| 53 | שברים עשרוניים במבט גיאומטרי            |
| 55 | שורשים                                  |
| 56 | שורשים מסדר גבוה                        |
| 56 | סיכום שיעור 1                           |
| 57 | שאלות להערכה עצמית                      |

|           |                                             |
|-----------|---------------------------------------------|
| <b>59</b> | <b>שיעור 2: זהויות אלגבריות</b>             |
| 59        | תבניות מספר                                 |
| 61        | נוסחאות                                     |
| 62        | זהויות אלגבריות                             |
| 65        | חוקי החילוף והקיבוצ                         |
| 66        | חוק הפילוג                                  |
| 70        | חוקי האיברים הניטרליים                      |
| 71        | חוקי החיסור והאיבר הנגדי                    |
| 74        | פירוק לגורמים בעזרת חוק הפילוג              |
| 75        | חוקי החילוק                                 |
| 77        | פעולות בשברים אלגבריים                      |
| 81        | נוסחאות הכפל המקוצר                         |
| 82        | פירוק לגורמים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר     |
| 84        | חוקי החזקות                                 |
| 88        | סיכום שיעור 2                               |
| 89        | שאלות להערכה עצמית                          |
| <br>      |                                             |
| <b>91</b> | <b>שיעור 3: משוואות אלגבריות</b>            |
| 92        | הגדרת מושגי המשוואה והפתרון                 |
| 93        | כללי היסק בפתרון משוואות                    |
| 98        | משוואות לינאריות בנעלם אחד                  |
| 100       | סוגים של היקש לוגי                          |
| 104       | בעיות מילוליות במשתנה אחד                   |
| 106       | בעיות תנועה                                 |
| 107       | בעיות תפוקה                                 |
| 109       | פתרון משוואות בעזרת פירוק לגורמים           |
| 112       | משוואות ריבועיות                            |
| 113       | פתרון משוואות ריבועיות בשיטת הפירוק לגורמים |
| 115       | פתרון משוואות ריבועיות בשיטת ההשלמה לריבוע  |
| 118       | נוסחת השורשים לפתרון משוואה ריבועית         |
| 120       | מסקנות מנוסחת השורשים                       |
| 122       | סיכום שיטות הפתרון למשוואות ריבועיות        |
| 122       | משוואות בשני נעלמים: שיטת החילוף וההצבה     |
| 126       | שיטת האלימינציה                             |
| 128       | הצגת משתנה חדש בפתרון משוואות               |
| 130       | משוואות ממעלה גבוהה מ-2 (סקירה הסטורית)     |
| 131       | סיכום שיעור 3                               |
| 132       | שאלות להערכה עצמית                          |

|            |                                       |
|------------|---------------------------------------|
| <b>135</b> | <b>שיעור 4: אי־שוויונות</b>           |
| 136        | קבוצות                                |
| 138        | קטעים על הישר                         |
| 141        | פעולות על קבוצות                      |
| 142        | הקבוצה הריקה                          |
| 142        | תכונות היסוד של יחס הסדר              |
| 144        | תכונות נוספות של יחס הסדר             |
| 148        | הוכחה של אי־שוויונות פשוטים           |
| 151        | מעברי שקילות באי־שוויונות             |
| 153        | פתרון של אי־שוויונות לינאריים         |
| 154        | שיטת החלוקה למקרים                    |
| 156        | אי־שוויון לגבי סימן מכפלה             |
| 159        | אי־שוויונות ריבועיים                  |
| 163        | הערך המוחלט                           |
| 165        | משוואות ואי־שוויונות עם ערכים מוחלטים |
| 167        | אי שוויון המשולש (עבור הערך המוחלט)   |
| 168        | מרחק בין נקודות על הישר               |
| 169        | אי־שוויון המשולש (עבור המרחק)         |
| 173        | סיכום שיעור 4                         |
| 174        | שאלות להערכה עצמית                    |
| 175        | פתרונות לשאלות בשיעור 1               |
| 193        | פתרונות לשאלות בשיעור 2               |
| 213        | פתרונות לשאלות בשיעור 3               |
| 250        | פתרונות לשאלות בשיעור 4               |
| 283        | סיכום הנוסחאות בכרך א                 |





## פתח דבר

מטרתו של קורס זה היא להיות שער כניסה ללימודים אקדמיים, בכל הקשור לידע ומיומנות מתמטיים. קורס זה מאפשר לכם להשלים את הידע הנדרש כדי להתחיל את קורסי השנה הראשונה במתמטיקה באוניברסיטה הפתוחה ובמוסדות אחרים, בין אם למדתם את החומר ואתם מעוניינים לחזק ולרענן את הידע, ובין אם זו הפעם הראשונה שבה אתם נתקלים בחומר זה.

במהלך הקורס נלמד את יסודות הטכניקה האלגברית, הטריגונומטריה, ההנדסה האנליטית, ונושאים נוספים. ולא פחות חשוב מכך, נקנה את יסודות החשיבה המתמטית. מדי פעם נעצור להרהר על המשמעות של המתמטיקה והעיסוק בה.

אחת ממטרות המשנה של קורס זה היא להפוך את המתמטיקה עבורכם לשפה מדוברת, ולהסיר את החששות שמתלווים, לפעמים, לעיסוק במקצוע זה. כך נהפוך עבורכם את המתמטיקה לקרקע בטוחה, שתוכלו לצעוד בה בחופשיות. כדי להגיע לתוצאה המבורכת הזו, נלמד ונבהיר את החוקים הפשוטים שעליהם מבוססת המתמטיקה. הכרת חוקים אלה ותרגול השימוש בהם יאפשרו לכם לדעת בוודאות גמורה שאתם הולכים בדרך הנכונה.

כדי שנצליח במשימתנו, שיתוף הפעולה שלכם הוא הכרחי, בשני מישורים עיקריים: האחד, הוא הלימוד העקבי והמתמיד של החומר בקורס זה; והשני, הוא פתיחת המחשבה, והאמונה בכוחכם להבין את החומר במלואו. מחבר קורס זה מאמין ביכולתכם זו אמונה שלמה.

### הידע הנדרש כדי ללמוד קורס זה

הידע היחיד שאותו לא נלמד בקורס הוא הטכניקה של פעולות החשבון היסודיות: חיבור, חיסור, כפל וחילוק – בשיטת ה'חיבור הארוך', ה'חיסור הארוך' וכן הלאה.

### החומר הנלמד בקורס זה

רובו של החומר בקורס זה מקביל לחומר הנלמד בבתי הספר התיכוניים, ברמת 5 יחידות. אך ההקבלה אינה מלאה: מחד, חלקים מחומר הלימוד התיכוני, אשר אינם חיוניים ללימודיכם האקדמיים, אינם נלמדים בקורס זה; מאידך, צורת הלמידה והחשיבה בקורס זה מכוונת באופן ספציפי להמשך לימודיכם האקדמיים.

## צורת הלימוד בקורס

עיקר הלימוד בקורס הוא קריאת חומר הלימוד שבספרים, ופתרון מתמיד של התרגילים שבהם. פתרון התרגילים הוא חלק אינטגרלי וחיוני בתהליך הלימוד. תוכלו להפיק תועלת רבה מהשוואת הפתרונות שלכם לתשובות המופיעות בסוף כל כרך. כך תוכלו לשכלל את יכולתכם להתנסח בבהירות – יכולת שחשיבותה רבה, ופיתוחה הוא אחת ממטרות קורס זה. זכרו כי תשובה מלאה לשאלה אינה מתמצה בתוצאה מספרית נכונה, ומרכיב חשוב בה הוא הסבר מלא ונהיר של הצעדים הלוגיים והחשוביים בדרך אל הפתרון.

## שימוש במחשבון

כמעט כל התרגילים בספר זה אינם מחייבים שימוש במחשבון. השתדלו להימנע ככל הניתן משימוש במחשבון, ולהיעזר בו רק במקרים של חישובים מסובכים במיוחד. כך תחזקו את שליטתכם בחומר.

# שיעור 1

## אריתמטיקה

בתחילתו של קורס זה, ניזכר בכמה מהפעולות היסודיות של החשבון (אריתמטיקה) ובחוקים היסודיים שלהן. ייתכן כי אתם כבר מכירים חומר זה; אך בכל זאת מומלץ לקרוא את כל הפרק, כדי לוודא שהיסודות ידועים וברורים לכם. במיוחד מומלץ לשים לב לחומר בנושאים: פעולות במספרים שליליים, סדר הפעולות, ופעולות בשברים. יסודות אלה חשובים להמשך הקורס.

### מספרים טבעיים

נתחיל מפעולת הספירה הבסיסית ביותר. המספרים המשמשים אותנו לספירה הם

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

מספרים אלה נקראים בשם **מספרים טבעיים**.

מספרים טבעיים מאפשרים לנו לייצג כמות של עצמים (לדוגמה: תפוחים, מכוניות, בני אדם, מילים). הפעולה שמאפשרת ייצוג מספרי לכמות היא פעולת הספירה.

### פעולת החיבור

**פעולת החיבור** (המסומנת +) מאפשרת לייצג איחוד של כמויות. תוצאת פעולת החיבור נקראת **סכום**.

הדרך הבסיסית ביותר לבצע את פעולת החיבור היא על ידי ספירה. לדוגמה, כדי לחשב את הסכום  $5 + 3$ , נתחיל מהמספר 5, ונספור אחריו 3 מספרים נוספים:

6, 7, 8

כך נגיע לתוצאה:  $5 + 3 = 8$ .

עבור מספרים קטנים ניתן להיעזר בלוח החיבור:

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

עבור מספרים גדולים יותר, שיטת החיבור הארוך היא היעילה ביותר.

נחשב, למשל, את הסכום  $584 + 27$  בשיטת החיבור הארוך:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 584 \\ + 27 \\ \hline 611 \end{array}$$

ניתן, כמובן, לחבר יותר משני מספרים. סדר הפעולות הוא משמאל לימין: מתחילים במחובר השמאלי, ומוסיפים אליו בהדרגה את המחברים האחרים, לפי הסדר.

נתבונן, למשל, בביטוי:  $3 + 7 + 11$

בביטוי זה, המספרים 3, 7, 11 הם המחברים, וערך הביטוי הוא הסכום של מספרים אלה.

כדי לחשב סכום זה, נחשב תחילה את הסכום  $3 + 7$ , ונקבל 10. כעת נוסיף לתוצאה שקיבלנו 11, ונקבל את התוצאה הסופית 21.

נוח לבטא את שלבי החישוב באופן הבא:

$$\frac{3+7}{10} + 11 = 21$$

צורת רישום זו נפוצה ושימושית מאוד: שרשרת של שוויונות. כל שוויון הוא חוליה בשרשרת, ומהשרשרת כולה מסיקים את השוויון בין הביטוי ההתחלתי לביטוי הסופי.

ניתן לבטא זאת גם כך:  $3 + 7 + 11 = 10 + 11 = 21$

## שאלה 1

חשבו את הסכומים הבאים. הציגו את שלבי החישוב, בכל אחת משתי הדרכים שתוארו לעיל.

התשובה בעמוד 175

א.  $1 + 2 + 3$       ב.  $4 + 17 + 19 + 5$       ג.  $3 + 3 + 3$

## פעולת הכפל

**פעולת הכפל במספרים הטבעיים** (מסומנת  $\times$  או  $\cdot$ ) מתקבלת מחיבור חוזר ונשנה של אותו המספר. המספר שאותו מחברים כמה פעמים נקרא **הנכפל** והמספר המייצג את כמות החזרות נקרא **הכופל**. תוצאת פעולת הכפל נקראת **מכפלה**.

לדוגמה, בביטוי  $3 \times 5$ , 3 הוא הכופל, 5 הוא הנכפל, וכדי לחשב את ערך המכפלה עלינו לחבר 3 פעמים את המספר 5. כלומר,

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

באופן דומה:  $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$

$$7 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$$

$$1 \times 3 = 3$$

# 11 שיעור 1: אריתמטיקה

לוח הכפל כולל את מכפלות המספרים שבין 1 ל-10:

| ×  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 2  | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20  |
| 3  | 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30  |
| 4  | 4  | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40  |
| 5  | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50  |
| 6  | 6  | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60  |
| 7  | 7  | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70  |
| 8  | 8  | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80  |
| 9  | 9  | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90  |
| 10 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

ניתן לחשב מכפלות של מספרים גדולים יותר בשיטת הכפל הארוך. נחשב, למשל, את המכפלה  $13 \times 37$ :

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 \times 37 \\
 \hline
 91 \\
 39 \phantom{0} \\
 \hline
 481
 \end{array}$$

הנה כמה דוגמאות לפעולות הכפל בחיי היומיום:

א. אם נקנה 3 שישיות של בקבוקי מים, יהיו לנו בסך הכול

$$6 + 6 + 6 = 3 \times 6 = 18$$

בבקבוקי מים.

ב. אם מחירה של חולצה אחת הוא 50 שקלים, אז בקנייה של 5 חולצות נשלם:

$$50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 5 \times 50 = 250$$

שקלים.

בוודאי תוכלו לחשוב על דוגמאות נוספות!

בדומה לחיבור מרובה של מספרים, ניתן להכפיל כמה מספרים זה בזה. למספרים המשתתפים בפעולת כפל (רגילה או מרובה) קוראים **גורמים**. סדר הפעולות בפעולת כפל מרובה הוא משמאל לימין.

$$2 \times 3 \times 4$$

נתבונן, לדוגמה, במכפלה:

כדי לחשב את ערך המכפלה, נכפיל תחילה  $2 \times 3$  ונקבל 6. את התוצאה שקיבלנו נכפיל במספר 4 ונקבל את התוצאה הסופית 24.

כמקודם, נוכל להציג את שלבי החישוב כך:

$$\frac{2 \times 3}{6} \times 4 = 24$$

או כך:

$$2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 = 24$$

## שאלה 2

חשבו את המכפלות הבאות:

התשובה בעמוד 175

א.  $2 \times 3 \times 4 \times 5$

ב.  $2 \cdot 2 \cdot 2$

א.  $2 \times 3 \times 2$

## סדר הפעולות בביטויים הכוללים חיבור וכפל

כאשר נתון ביטוי המערב פעולות חיבור וכפל, המוסכמה היא שיש לבצע תחילה את פעולות הכפל, ולאחר מכן את פעולות החיבור.

לדוגמה, נתבונן בביטוי

$$3 + 2 \times 4$$

כדי לחשב את ערך הביטוי, נחשב תחילה  $2 \times 4 = 8$  ואת התוצאה נחבר למספר 3. נקבל:

$$3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$

נוכל להציג חישוב זה גם כך:

$$3 + \frac{2 \times 4}{8} = 11$$

אותו כלל תקף גם לפעולות חיבור וכפל מרובות. לדוגמה, נחשב את ערך הביטוי

$$2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 3$$

$$\frac{2 \times 3}{6} + \frac{2 \times 3 \times 4}{24} + \frac{3 \times 3}{9} = 39$$

## שאלה 3

חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $1 \times 3 + 2 \times 2 + 4 \times 1$

ב.  $4 \times 5 + 6 \times 7$

א.  $1 + 2 \times 3$

ד.  $2 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3$

התשובה בעמוד 175

## סוגריים

ניתן לשנות את סדר הפעולות שבו מחושב ביטוי על ידי הקפת חלק ממנו בסוגריים: ( ). כאשר יש סוגריים בביטוי, הכלל הוא שיש לחשב תחילה את מה שבתוך הסוגריים.

לדוגמה, כדי לחשב את ערך הביטוי  $(3 + 2) \times 4$

נחשב תחילה את הסכום  $3 + 2$ , ואת התוצאה נכפיל ב-4. לפיכך:

$$(3 + 2) \times 4 = 5 \times 4 = 20$$

בביטוי יכולים להופיע כמה זוגות סוגריים. לדוגמה:

$$(1 + 2) \times (1 + 3) = 3 \times 4 = 12$$

לעתים סוגריים יכולים להופיע בתוך סוגריים אחרים. במקרה זה הכלל הוא שיש לחשב תחילה את הסוגריים הפנימיים ביותר.

$$2 \times (1 + 2 \times (3 + 4)) = 2 \times (1 + 2 \times 7) = 2 \times 15 = 30$$

לדוגמה:

#### שאלה 4

חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $3 + 5 \times 6$

ב.  $(3 + 5) \times 6$

ג.  $7 \times 4 + 4$

ד.  $2 + 3 \times 5 + 7$

ה.  $(1 + 3) \cdot (4 + 3) \cdot (2 + 2)$

ו.  $(1 + 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 7 + 1$

ז.  $1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot (1 + 2)))$

ח.  $2 \cdot 1 + (3 \cdot 2) + 5 \cdot (4 + 1)$

התשובה בעמוד 176

#### חוקי החילוף והקיבוצ

בפעולת החיבור ניתן להבחין בכלל הבא:

**שינוי סדר המחברים בפעולת חיבור אינו משפיע על התוצאה.**

לדוגמה: הסכום  $3 + 5$  שווה לסכום  $5 + 3$  (שניהם שווים ל-8).

וכן:

$$2 + 3 = 3 + 2 = 5$$

$$6 + 4 = 4 + 6 = 10$$

הבחנה זו נכונה גם בחיבור של יותר משני מספרים.

$$4 + 9 + 6 = 6 + 9 + 4 = 9 + 4 + 6 = 19$$

לדוגמה:



הבחנה זו מתיישבת עם תפיסת החיבור כמייצג איחוד של כמויות. לדוגמה, אם יוסי הכניס לסל 4 תפוחים ומירב הכניסה לסל 6 תפוחים, יהיו בסל 10 תפוחים, ללא תלות בשאלה מי הכניס ראשון את התפוחים.

תכונה זו של פעולת החיבור נקראת **חוק החילוף בחיבור**.

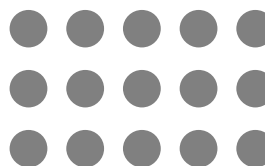
באופן דומה (אך אולי מפתיע יותר) ניתן להבחין שמתקיים חוק החילוף בכפל:

**שינוי סדר הגורמים בפעולת כפל אינו משפיע על התוצאה.**

לדוגמה, המכפלה  $3 \times 5$  שווה למכפלה  $5 \times 3$  (שתיהן שוות ל-15).

כלומר, לפי הגדרת הכפל:  $5 + 5 + 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

ניתן להבין שוויון זה בעזרת התרשים הבא:



מספר הנקודות בתרשים ניתן לחישוב בשתי הדרכים הבאות –

- א. בתרשים יש 3 שורות ובכל שורה יש 5 נקודות; לכן יש  $3 \times 5$  נקודות.
- ב. בתרשים יש 5 עמודות, ובכל עמודה יש 3 נקודות, לכן יש  $5 \times 3$  נקודות.

בשתי הדרכים חישבנו את אותו מספר נקודות, ולכן  $3 \times 5 = 5 \times 3$ .

ניתן לשנות את סדר ההכפלה גם כשיש מספר גדול יותר של גורמים. לדוגמה:

$$3 \times 5 \times 2 = 5 \times 3 \times 2 = 2 \times 5 \times 3 = 30$$

נעבור לתכונה נוספת, הנקראת **חוק הקיבוץ בחיבור ובכפל**:

**בחיבור של שלושה מספרים או יותר, ובכפל של שלושה מספרים או יותר, סדר הפעולות אינו משפיע על התוצאה הסופית.**

לדוגמה, נתבונן בביטוי:  $3 + 2 + 6$

כפי שלמדנו, הדרך לחשב אותו היא לחשב תחילה את הסכום  $3 + 2$ , ולתוצאה לחבר את 6. בעזרת סוגריים, ניתן לבטא סדר פעולות זה כך:

$$(3 + 2) + 6$$

כעת ננסה לבצע את הפעולות בסדר שונה: נחשב תחילה את הסכום  $2 + 6$ , ונחבר את התוצאה ל-3. בעזרת סוגריים נבטא סדר פעולות זה כך:

$$3 + (2 + 6)$$

לפי חוק הקיבוץ בחיבור, שתי האפשרויות יניבו את אותה תוצאה. ואכן:

$$(3 + 2) + 6 = 5 + 6 = 11$$

$$3 + (2 + 6) = 3 + 8 = 11$$

### שאלה 5

ודאו (על ידי חישוב הביטויים לפי סדר הסוגריים) כי מתקיים:

א.  $(2 + 5) + 8 = 2 + (5 + 8)$

ב.  $(4 + 1) + 1 = 4 + (1 + 1)$

ג.  $(2 + 2) + 3 = 2 + (2 + 3)$

התשובה בעמוד 176

אותו הכלל תקף גם בכפל. לדוגמה, ניתן לחשב את המכפלה  $3 \times 2 \times 4$  בשתי הדרכים:

$$(3 \times 2) \times 4 = 6 \times 4 = 24$$

$$3 \times (2 \times 4) = 3 \times 8 = 24$$

### שאלה 6

ודאו כי מתקיים:

א.  $(5 \times 2) \times 6 = 5 \times (2 \times 6)$

ב.  $(2 \times 2) \times 3 = 2 \times (2 \times 3)$

התשובה בעמוד 176

בחיבור או בכפל של יותר משלושה מספרים, יש מספר רב יותר של אפשרויות להכנסת סוגריים. בהתאם לחוק הקיבוץ, כולן מניבות את אותה התוצאה.

לדוגמה, כל הדרכים הבאות לחישוב הסכום  $2 + 4 + 1 + 5$  מובילות לאותה התוצאה:

$$((2 + 4) + 1) + 5 = (6 + 1) + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$(2 + (4 + 1)) + 5 = (2 + 5) + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$(2 + 4) + (1 + 5) = 6 + 6 = 12$$

$$2 + (4 + (1 + 5)) = 2 + (4 + 6) = 2 + 10 = 12$$

לסיכום, בביטוי המכיל פעולות חיבור בלבד או פעולות כפל בלבד, סדר המספרים וגם סדר ביצוע הפעולות אינם משפיעים על התוצאה הסופית.

אך שימו לב: בביטויים המשלבים פעולות כפל וחיבור, סדר הפעולות (ובוודאי סדר הופעת המספרים) משפיעים על התוצאה הסופית.

לדוגמה,  $(2 + 3) \times 4$  אינו שווה ל-  $2 + (3 \times 4)$  (ודאו!).

בביטויים כאלה חשוב, אפוא, להקפיד על ביצוע סדר הפעולות כפי שלמדנו בעבר.

## שאלה 7

בביטויים הבאים, מצאו שתי דרכים שונות להכנסת סוגריים, וודאו שהן מניבות תוצאה זהה:

א.  $1 + 4 + 3$

ב.  $2 \times 5 \times 3$

ג.  $3 + 4 + 1 + 2$

ד.  $1 \times 2 \times 3 \times 4$

התשובה בעמוד 177

## פעולת החיסור

פעולת החיסור מבטאת את הנטילה של כמות אחת מתוך כמות אחרת. פעולה זו היא הפוכה לפעולת החיבור, כי נטילה והוספה הן פעולות הפוכות זו לזו. פעולת החיסור נכתבת בתבנית הבאה:

$$\text{הפרש} = \text{מחוסר} - \text{מחוסר}$$

(במילים: מחוסר פחות מחוסר שווה להפרש)

$$\text{מחוסר} = \text{מחוסר} + \text{הפרש}$$

שוויון זה שקול ל:

$$8 - 3 = 5$$

לדוגמה:

בפעולת חיסור זו 8 הוא המחוסר, 3 הוא המחוסר ו-5 הוא ההפרש.

$$5 + 3 = 8$$

בהתאם לכך, מתקיים:

ניתן לבצע את פעולת החיסור במספרים הטבעיים על ידי ספירה לאחור. לדוגמה, כדי לחשב את ההפרש  $9 - 4$  נספור לאחור, החל מהמספר 9, ארבע פעמים:

$$8, 7, 6, 5$$

$$9 - 4 = 5$$

ונקבל את התוצאה

באופן יעיל יותר, ניתן לחשב הפרשים בשיטת החיסור הארוך. נחשב לדוגמה את ההפרש  $983 - 144$ :

$$\begin{array}{r} 983 \\ - 144 \\ \hline 839 \end{array}$$

פעולת החיסור אינה מקיימת את חוק הקיבוץ, וגם לא את חוק החילוף; לכן כשמחשבים ביטויים הכוללים פעולת חיסור חשוב להקפיד על סדר הפעולות. סדר זה מוגדר כך:

- כאשר ביטוי כולל פעולות חיבור וחיסור, יש לבצע אותן לפי סדר הופעתן משמאל לימין.
- פעולת הכפל קודמת לחיבור ולחיסור.
- סוגריים תמיד מקבלים עדיפות על פני פעולות החשבון.

לדוגמה:

א. כדי לחשב את ערך הביטוי  $23 - 10 - 3$ , נחסר תחילה  $23 - 10 = 13$ , ומהתוצאה נחסר את 3. בסך הכול נקבל:

$$\frac{23 - 10}{13} - 3 = 10$$

$$10 - 2 + 3 = 8 + 3 = 11 \quad \text{ב.}$$

$$10 - 2 \times 3 = 10 - 6 = 4 \quad \text{ג.}$$

$$15 - (4 - 2) = 15 - 2 = 13 \quad \text{ד.}$$

### שאלה 8

חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

|                            |                              |                             |
|----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| א. $9 + 4 - 3$             | ב. $10 - 2 - 3$              | ג. $4 \times 3 - 1$         |
| ד. $15 - 2 - 3 - 2$        | ה. $100 - (10 - 2) \times 6$ | ו. $(8 - 2) \times (8 + 2)$ |
| ז. $2 + 3 - 1 + 4 - 1 - 2$ | ח. $4 \times 2 + 5 - 7$      |                             |

התשובה בעמוד 177

### מספרים שליליים

בפעולת החיסור, כדי שהתוצאה תהיה מספר טבעי, נדרש שהמחוסר יהיה גדול יותר מהמחסר.

בכל הדוגמאות שראינו עד כה, דאגנו שתנאי זה יתקיים. למשל, 983 יותר גדול מ-144, ולכן יכולנו לחסר  $983 - 144$  ולקבל את ההפרש 839, שהוא מספר טבעי.

אך גם כאשר תנאי זה לא מתקיים, ניתן לבצע את החיסור. לצורך כך נרחיב את מערכת המספרים שלנו, על ידי הוספה של המספר 0 והמספרים  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$  (מינוס אחת, מינוס שתיים, מינוס שלוש) וכן הלאה.

כלל המספרים  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  נקראים **מספרים שלמים**.

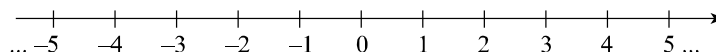
המספרים  $\dots, -3, -2, -1$  נקראים **מספרים שלמים שליליים**.

המספרים  $0, 1, 2, 3, \dots$  נקראים **מספרים שלמים אי-שליליים**.

המספרים  $1, 2, 3, \dots$  נקראים (כידוע) **מספרים טבעיים** וגם **מספרים שלמים חיוביים**.

נהוג לייחס סימן למספרים שלמים: למספר שלילי יש סימן  $-$  (מינוס), וסימן זה כלול בסימון המספר; למספר חיובי יש סימן  $+$  (פלוס), וסימן זה בדרך כלל לא מצוין במפורש. עבור המספר 0 לא מוגדר סימן.

מקובל להציג את המספרים השלמים על קו ישר, הנקרא **ציר המספרים**, באופן הבא:



הכיוון הימני באיור זה נקרא **הכיוון החיובי**, והכיוון השמאלי נקרא **הכיוון השלילי**.

ניתן לראות את פעולת החיסור כפעולה של תזוזה בכיוון השלילי. לדוגמה, כדי לדמות את הפעולה  $5 - 3$ , נתחיל מהמספר 5, וננוע שלושה צעדים בכיוון השלילי; כך נגיע אל המספר 2, שהוא אכן ההפרש המבוקש.

באופן זה החיסור מוגדר בין כל שני מספרים טבעיים, גם כאשר המחסר גדול מהמחוסר. לדוגמה:

$$2 - 5 = -3$$

כי כאשר נעים מהנקודה 2 חמישה צעדים בכיוון השלילי, מגיעים אל הנקודה -3.

המספרים השליליים נפוצים מאוד בחיי היומיום. לדוגמה:

- א. יתרת חשבון בנק יכולה להיות חיובית (יתרת זכות) ויכולה להיות שלילית (יתרת חובה). אם בחשבוננו היו 3 שקלים, ומשכנו 5 שקלים, היתרה המעודכנת תהיה שני שקלים בחובה, כלומר  $3 - 5 = -2$  שקלים, בהתאם לפעולת החיסור.
- ב. בבניינים רבים מקובל לסמן את קומת הקרקע ב־0 וקומות מתחת לפני האדמה במספרים שליליים. אם ירדנו מהקומה השנייה 4 קומות, נגיע לקומה -2, בהתאם לפעולת החיסור  $2 - 4 = -2$ .

נקודת ה-0 על ציר המספרים נקראת גם **הראשית**. לכל מספר שלם יש מספר נגדי (או בקיצור: נגדי), שהוא בבואתו הסימטרית ביחס לראשית.

לדוגמה:

הנגדי של 3 הוא -3; הנגדי של -3 הוא 3.

הנגדי של 5 הוא -5; הנגדי של -5 הוא 5.

הנגדי של 0 הוא 0 (ו־0 הוא המספר היחיד הנגדי לעצמו).

נסמן את המספר הנגדי על ידי כתיבת הסימן - (מינוס) משמאל למספר המקורי. כאשר המספר המקורי הוא מספר שלילי, נקיף אותו בסוגריים כדי להימנע מרצף של שני סימני מינוס. נכתוב אפוא:

$$-(-3) = 3$$

שוויון זה מבטא את העובדה שהמספר הנגדי של -3 הוא 3.

$$-0 = 0$$

כמו כן:

כי הנגדי של 0 הוא 0.

הכללים הבאים מאפשרים לחשב את ההפרש של כל זוג מספרים טבעיים:

- בפעולת החיסור, החלפת סדר המחסר והמחוסר מביאה לתוצאה נגדית לתוצאה המקורית.
- ההפרש של מספר ועצמו שווה ל-0.

נדגים את הכלל הראשון:

$$3 - 2 = 1; \quad 2 - 3 = -1$$

$$8 - 2 = 6; \quad 2 - 8 = -6$$

כלל זה מאפשר לחשב הפרש כאשר המחסר גדול מהמחוסר, באופן הבא: הופכים את סדר המחסר והמחוסר, מחסרים, ומוסיפים סימן מינוס לפני התוצאה.

לדוגמה, נחשב את ההפרש  $10 - 30$ :

$$30 - 10 = 20$$

נחשב תחילה את ההפרש בסדר ההפוך –

$$10 - 30 = -20$$

ולכן, לפי כלל החלפת המחסר והמחוסר:

בשורה אחת, נוכל לבטא את החישוב שערכנו כך:

$$10 - 30 = -(30 - 10) = -20$$

כמה דוגמאות לכלל השני הן:  $100 - 100 = 0$ ,  $5 - 5 = 0$ ,  $1 - 1 = 0$

## שאלה 9

חשבו את ההפרשים הבאים:

ג.  $201 - 102$

ב.  $3 - 100$

א.  $1 - 10$

ה.  $200 - 200$

ד.  $102 - 201$

התשובה בעמוד 177

## הערך המוחלט

לכל מספר שלם (שלילי או חיובי) ניתן לייחס ערך מוחלט.

הערך המוחלט הוא המספר ללא הסימן שלפניו.

לדוגמה: הערך המוחלט של 6 הוא 6; הערך המוחלט של -6 הוא 6; הערך המוחלט של 0 הוא 0.

דרך שקולה להגדיר את הערך המוחלט היא: הערך המוחלט של מספר אי-שלילי (כלומר חיובי או 0) הוא המספר עצמו; הערך המוחלט של מספר שלילי הוא הנגדי לו.

מקובל לסמן את הערך המוחלט על ידי שני קווים אנכיים מסביב למספר.

לדוגמה:  $|-5| = 5$ ; כלומר – הערך המוחלט של  $-5$  הוא  $5$ .

דוגמאות נוספות:  $|1| = 1$ ;  $|0| = 0$ ;  $|-100| = 100$

נשים לב שהערך המוחלט הוא תמיד מספר אי-שלילי; ושכל מספר יש אותו הערך המוחלט כמו למספר הנגדי שלו.

## פעולות המערבות מספרים שליליים

נראה עכשיו איך ניתן להרחיב את הגדרת פעולות החיבור, החיסור והכפל למקרים שבהם מעורבים מספרים שליליים או 0. ייתכן שהגדרות אלה תיראנה לכם שרירותיות בשלב זה; אך הן נבחרו כדי שהחוקים המתקיימים במספרים הטבעיים (חוקי החילוף והקיבוץ בחיבור ובכפל, וחוקים נוספים שנכיר בהמשך) ימשיכו להתקיים גם במספרים השלמים. כפי שניווכח בהמשך, אחידות זו בחוקים היא אחד ממקורות העוצמה והשימושיות של המתמטיקה.

נתחיל עם הגדרת הכפל, שהיא פשוטה במיוחד. כדי לחשב מכפלות כגון –  $2 \times (-3)$ ,  $(-2) \times (-2)$

נסתמך על הכללים הבאים:

• הערך המוחלט של מכפלת שני מספרים שווה למכפלת ערכיהם המוחלטים.

• הסימן של מכפלת שני מספרים (שאינם 0) נקבע לפי הכללים הבאים:

חיובי  $\times$  חיובי = חיובי

חיובי  $\times$  שלילי = שלילי

שלילי  $\times$  שלילי = חיובי

• כאשר 0 הוא אחד הגורמים במכפלה, המכפלה שווה ל-0.

נדגים את השימוש בכללים אלה:

1. כדי לחשב את המכפלה  $2 \times (-3)$ , נכפיל תחילה את הערכים המוחלטים:

$$2 \times 3 = 6$$

לפי הכלל הראשון, הערך המוחלט של המכפלה  $2 \times (-3)$  הוא 6.

סימן המכפלה נקבע לפי הכלל "חיובי  $\times$  שלילי = שלילי". כלומר, סימן המכפלה הוא –. לפיכך:

$$2 \times (-3) = -6$$

כללים אלה נקראים: חוקי הסימנים

2. כדי לחשב את המכפלה  $(-2) \times (-2)$ , נכפיל תחילה את הערכים המוחלטים:

$$2 \times 2 = 4$$

לפי הכלל הראשון, הערך המוחלט של המכפלה  $(-2) \times (-2)$  הוא 4. סימן המכפלה נקבע לפי הכלל "שלילי  $\times$  שלילי = חיובי". כלומר, סימן המכפלה הוא +. לפיכך:

$$(-2) \times (-2) = 4$$

3. המכפלה  $0 \times 9 = 0$  שווה ל-0, לפי הכלל השלישי.

4. שימו לב שמהכלל השלישי נובע גם, שכל מכפלה של מספרים שאחד הגורמים בה הוא 0, שווה ל-0. למשל:

$$3 \times 3 \times 5 \times 9 \times 0 \times 7 = 0$$

בהערכת ביטוי זה לא היה צריך לחשב תוצאות ביניים; די להבחין כי 0 הוא אחד הגורמים במכפלה.

## שאלה 10

חשבו את המכפלות הבאות:

א.  $5 \times (-1)$

ב.  $(-5) \times (-5)$

ג.  $6 \times 7$

ד.  $(-2) \times (-2) \times (-3)$

ה.  $9 \times 0 \times (-3) \times 4$

ו.  $(-1) \times 3 \times (-1) \times (-5)$

התשובה בעמוד 178

נעבור להגדרת החיבור והחיסור במספרים השלמים. אלה מתבצעים בהתאם לכללים הבאים:

- **המספר הנגדי לסכום של שני מספרים שווה לסכום המספרים הנגדיים למספרים אלה.**

$$-(2 + 3) = (-2) + (-3)$$

לדוגמה:

- **חיסור של מספר (ממספר נתון) שקול לחיבור של הנגדי לאותו המספר (למספר הנתון).**

$$5 - 3 = 5 + (-3)$$

לדוגמה:

- **חיבור 0 למספר אינו משנה את ערכו.**

$$4 + 0 = 4$$

לדוגמה:

◁ בניסוח מקוצר:

הנגדי לסכום שווה לסכום הנגדיים.

◁ בניסוח מקוצר:

חיסור שקול לחיבור הנגדי.



נדגים את השימוש בכל אחד מהכללים:

א. נניח שברצוננו לחשב את הסכום:  $(-3) + (-5)$

המחזורים הם המספרים הנגדיים ל-3 ול-5, ולפי הכלל הראשון, המספר הנגדי לסכום  $3 + 5$  שווה לסכום של נגדיים אלה. כלומר,

$$-(3 + 5) = (-3) + (-5)$$

$$(-3) + (-5) = -(3 + 5) = -8 \quad \text{ולכן}$$

ב. כדי לחשב את הסכום  $4 + (-2)$

ניעזר בכלל השני: חיסור המספר 2 שקול לחיבור המספר הנגדי לו, -2. לפיכך:

$$4 - 2 = 4 + (-2)$$

$$4 + (-2) = 4 - 2 = 2 \quad \text{כלומר:}$$

ג. כדי לחשב את ההפרש  $4 - (-2)$

ניעזר שוב בכלל השני: חיסור המספר -2 שקול לחיבור המספר הנגדי לו, 2. לכן:

$$4 - (-2) = 4 + 2 = 6$$

ד. הסכום  $4 + 0$  שווה ל-4, כי כאמור, חיבור 0 למספר אינו משנה את ערכו.

הערות:

א. בנוסף לכללים אלה, ניתן להסתמך על הכללים שלמדנו עד כה; הם תקפים גם במספרים השלמים. תועלת מיוחדת תמצאו בחוק החילוף בחיבור ובכלל החלפת המחסר והמחוסר.

ב. בכתובי ביטויים מתמטיים יש להימנע מהופעה של שני סימני פעולה (למשל  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ) ברצף. לכן כאשר מחברים או מחסרים מספרים שליליים, יש להקיף אותם בסוגריים. אך כאשר מספר שלילי מופיע בתחילת הביטוי, אין בכך חובה. לכן ניתן לכתוב:

$$-3 + 4$$

$$(-3) + 4$$

ביטוי זה שקול לביטוי

וערכו, לפי הכלל השני, הוא

$$(-3) + 4 = 4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

⏏ כאן הסתמכנו גם על חוק החילוף בחיבור.

## 23 שיעור 1: אריתמטיקה

נתרגל את השימוש בכללים החדשים:

### שאלה 11

חשבו:

- |                  |                       |
|------------------|-----------------------|
| א. $4 + (-1)$    | ו. $-7 - (-4)$        |
| ב. $4 + (-5)$    | ז. $7 - 12$           |
| ג. $(-6) + (-8)$ | ח. $0 + 4$            |
| ד. $0 - (-3)$    | ט. $11 - 12 - 13$     |
| ה. $-3 - (-5)$   | י. $12 + (-1) - (-2)$ |

התשובה בעמוד 178

כעת נתרגל חישוב ביטויים שונים הכוללים חיבור, חיסור וכפל במספרים שלמים:

### שאלה 12

חשבו:

- א.  $2 - 3 \times 4$
- ב.  $5 - 2 \times (-4)$
- ג.  $(13 - 2) \cdot (13 - 4) \cdot (15 - 5 - 10)$
- ד.  $(5 - 2) \cdot (5 - 3) \cdot (5 - 6)$
- ה.  $2 - 3 - 4 + 5 - 6 - 8$
- ו.  $-1 - 2 - 3 - 4$
- ז.  $2 \cdot 4 - 3 \cdot 6$
- ח.  $((1 - 3) \cdot (1 - 4) \cdot (1 - 5) - 7) \cdot (-2) \cdot (-3)$

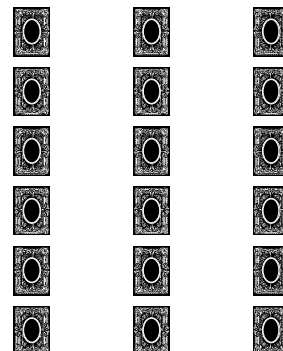
התשובה בעמוד 179

## פעולת החילוק

אנו מכירים מחיי היומיום מצבים שבהם יש לחלק כמות נתונה למספר נתון של כמויות שוות.

לדוגמה: במשחק יש 18 קלפים, ויש לחלק אותם באופן שווה בין 3 שחקנים. אחד השחקנים מתחיל לחלק קלף לכל שחקן לפי הסדר, עד שנגמרים הקלפים:

שחקן א      שחקן ב      שחקן ג



בסיום התהליך, כל שחקן קיבל 6 קלפים. סך הקלפים הוא 18, ולכן  $18 = 6 + 6 + 6$ , כלומר:

$$18 = 3 \times 6$$

מצאנו אפוא מספר שכאשר נכפיל אותו ב-3 נקבל 18. בדרך זו, חילקנו את 18 ב-3. אנו רואים שפעולת החילוק היא פעולה הפוכה לפעולת הכפל. פעולה זו עונה על השאלה: בכמה יש להכפיל מספר נתון, כדי לקבל מספר אחר.

למספר שאותו מחלקים קוראים **המחולק**.

למספר שבו מחלקים (המייצג את מספר החלקים שירכיבו את המחולק) קוראים **המחלק**. לתוצאת החילוק קוראים **מנה**.

צורת הרישום של הפעולה היא:  
ובמילים: המחולק חלקי המחלק שווה למנה.

צורות כתיבה מקובלות נוספות הן:  
או בכתיב השבר

$$\frac{\text{מחולק}}{\text{מחלק}} = \text{מנה}$$

שוויונות אלה שקולים לשוויון

בדוגמה שבה פתחנו, המחולק הוא 18, המחלק הוא 3 והמנה היא 6.

בהתאם לכך:  $18 : 3 = 6$

ובכתיב השבר:  $\frac{18}{3} = 6$

אחת הדרכים לבצע חילוק במספרים קטנים היא לנסות בהדרגה כפולות של המחלק, עד שמגיעים למחולק.

לדוגמה, כדי לחלק 35:7 ננסה בהדרגה כפולות של 7:

$$1 \times 7 = 7$$

$$2 \times 7 = 14$$

$$3 \times 7 = 21$$

$$4 \times 7 = 28$$

$$5 \times 7 = 35$$

$$35 : 7 = 5$$

מצאנו כי  $5 \times 7 = 35$ , ולכן

עבור מספרים גדולים יותר ניתן לחשב מנה בשיטת החילוק הארוך. לדוגמה, נחלק את 1582 ב־7:

$$\begin{array}{r} 226 \\ 7 \overline{) 1582} \\ \underline{14} \phantom{00} \\ 18 \phantom{00} \\ \underline{14} \phantom{00} \\ 42 \phantom{00} \\ \underline{42} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$1582 : 7 = 226$$

$$226 \times 7 = 1582$$

קיבלנו:

ואכן ניתן לבדוק שמתקיים:

### שאלה 13

חלקו:

א.  $18 : 2$

ב.  $9 : 3$

ג.  $1260 : 35$

ד.  $16/16$

ה.  $4/1$

ו.  $100/10$

התשובה בעמוד 179

### חילוק עם שארית

לא תמיד ניתן לבצע את פעולת החילוק בין שני מספרים טבעיים ולקבל תוצאה שהיא מספר טבעי. לדוגמה, אם ננסה לחלק את 20 ב־6, ניתקל בבעיה: הכפולות הראשונות של 6 הן

$$1 \times 6 = 6$$

$$2 \times 6 = 12$$

$$3 \times 6 = 18$$

הכפולה הבאה,  $4 \times 6 = 24$ , כבר גדולה מ־20.

אנו רואים ש־ $3 \times 6 = 18$  היא הכפולה הגדולה ביותר של 6 שנכנסת בתוך 20.

במקרה זה נאמר שיש שארית של 2 בחלוקה של 20 ב־6; וש־3 הוא המנה השלמה של חלוקה זו.

לדוגמה, אם ננסה לחלק 20 כדורי שוקולד באופן שווה בין שישה ילדים, לא נוכל לחלק את כולם, אבל נוכל להשאיר שניים ברשותנו ולחלק את 18 הכדורים הנותרים כך שכל ילד יקבל שלושה.

באופן כללי, **המנה השלמה** היא המספר השלם הגדול ביותר שבו ניתן להכפיל את המחלק ולקבל מספר שאינו יותר גדול מהמחולק; **והשארית** היא ההפרש בין המחולק לבין הכפולה הגדולה ביותר של המחלק שאינה גדולה מהמחולק.

בחלוקה עם שארית, מתקיימים תמיד הכללים הבאים:

•  $\text{השארית} + \text{המחלק} \times \text{המנה השלמה} = \text{המחולק}$

•  $\text{השארית היא מספר שלם אי־שלילי.}$

•  $\text{השארית יותר קטנה מהמחלק.}$

(כי אם היא היתה גדולה מהמחלק או שווה לו, ניתן היה להגדיל את המנה).

לדוגמה, כשחילקנו 20 ב־6 קיבלנו מנה שלמה 3 ושארית 2. השארית היא אכן מספר שלם אי־שלילי, השארית קטנה מהמחלק, ומתקיים:

$$20 = \underbrace{3}_{\text{המנה}} \times 6 + \underbrace{2}_{\text{השארית}}$$

השלמה

שיטת החילוק הארוך מאפשרת לקבוע את השארית והמנה השלמה. לדוגמה: אם נחלק 100 ל־6, נקבל:

$$\begin{array}{r} 16 \\ 6 \overline{)100} \\ \underline{6} \phantom{00} \\ 40 \\ \underline{36} \phantom{0} \\ 4 \end{array}$$

המנה השלמה היא 16, והשארית היא 4.

אכן מתקיים השוויון  $100 = 16 \times 6 + 4$

והשארית 4 היא אי־שלילית, וקטנה מהמחלק 6.

## שאלה 14

בצעו חלוקה עם שארית במקרים הבאים:

א. מחולק = 9, מחלק = 2

ב. מחולק = 21, מחלק = 3

ג. מחולק = 100, מחלק = 7

ד. מחולק = 90, מחלק = 6

ה. מחולק = 1000, מחלק = 13

ודאו כי בכל אחד מהמקרים מתקיים השוויון:  $\text{שארית} + \text{מחלק} \times \text{מנה שלמה} = \text{מחולק}$ .

התשובה בעמוד 180

## שברים

כפי שראינו, פעולת החילוק בין מספרים טבעיים לא תמיד מניבה מספר שלם. לדוגמה, אם ננסה לחלק 1 ב-2 תתקבל מנה שלמה 0, ושארית 1. אך בוודאי כולנו מכירים מצבים שבהם עלינו לחלק שלם לשני חלקים: לדוגמה, אם ברשותנו כיכר לחם ואנו רוצים לחלקה באופן שווה בין שני אנשים, כל אחד יקבל חצי מהכיכר. המספר חצי (המסומן  $1/2$ ) הוא **שבר**. מספר זה מייצג את תוצאת החלוקה של 1 ב-2.

באופן דומה, ניתן לחלק את 1 במספרים טבעיים אחרים ולקבל שברים:

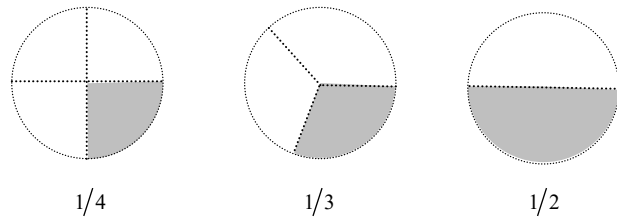
1 חלקי 3 הוא שליש ( $1/3$ );

1 חלקי 4 הוא רבע ( $1/4$ );

1 חלקי 5 הוא חמישית ( $1/5$ );

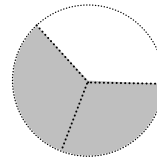
וכן הלאה.

ניתן לייצג שברים כאלה באופן גרפי כך:



נוכל גם לחלק את 2 ל-3, ל-4, וכן הלאה.

לדוגמה, אם נחלק את 2 ל-3 נקבל שני שלישים ( $2/3$ ). באופן גרפי שבר זה נראה כך:



באופן הכללי ביותר, שבר הוא ביטוי מהצורה: מספר שני / מספר ראשון

ביטוי זה יכול להיכתב גם בצורה:

$$\frac{\text{מספר ראשון}}{\text{מספר שני}}$$

המספר הראשון בביטוי זה נקרא **המונה**. המונה יכול להיות כל מספר שלם.

המספר השני נקרא **מכנה**. המכנה יכול להיות כל מספר שלם, למעט 0.

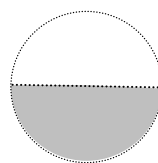
גם השבר הוא מספר, המייצג את תוצאת החלוקה של המונה במכנה – בין אם תוצאה זו היא מספר שלם, ובין אם לאו.

לדוגמה,  $2 = 6 : 3$

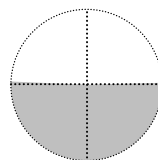
ולכן השבר  $6/3$  מייצג את המספר השלם 2; אך תוצאת החילוק של  $6 : 5$  אינה מספר שלם, ולכן השבר  $6/5$  לא מייצג מספר שלם.

## הרחבה של שברים

נתבונן בשבר  $1/2$  ובייצוגו הגרפי:



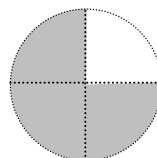
ניתן לייצג שבר זה גם כשני רבעים:



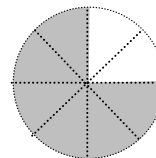
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

מכאן מתקבל השוויון

באופן דומה, בשבר  $3/4$ , ניתן להציג כל רבע כשתי שמיניות:



$3/4$



$6/8$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

מתקבל השוויון:

לפעולה זו קוראים **הרחבה של שבר**. כדי לבצע הרחבה מכפילים את המונה ואת המכנה באותו המספר.

המספר שבו מכפילים את המונה והמכנה נקרא **גורם ההרחבה**.

בדוגמה הקודמת, הרחבנו את השבר  $\frac{3}{4}$ . גורם ההרחבה היה 2:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

אם נרחיב את השבר  $\frac{3}{4}$  בגורם ההרחבה 3, נקבל:

באופן כללי, מתקיים הכלל הבא, הנקרא **כלל ההרחבה**:

**הכפלת המונה והמכנה באותו המספר לא משנה את ערך השבר.**

### שאלה 15

הרחיבו כל אחד מהשברים הבאים על ידי הכפלת המונה והמכנה ב־2, ב־3 וב־4:

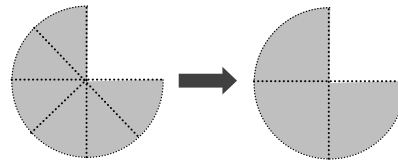
א.  $\frac{2}{3}$       ב.  $\frac{1}{2}$       ג.  $\frac{7}{2}$       ד.  $\frac{22}{14}$

התשובה בעמוד 180

### צמצום שברים

כפי שהצגנו את השבר  $\frac{3}{4}$  כ־ $\frac{6}{8}$ , ניתן לבצע את התהליך ההפוך: להציג את השבר  $\frac{6}{8}$  כ־ $\frac{3}{4}$ .

מבחינה גרפית, פעולה זו נראית כך:



מבחינה מתמטית, פעולת הצמצום מתבצעת על ידי חלוקת המונה והמכנה באותו המספר.

לדוגמה: בשבר  $\frac{6}{9}$ , נחלק את המונה ואת המכנה ב־3, ונקבל:

$$\frac{6}{9} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$$

בהינתן שבר, נשאף בדרך כלל לצמצם אותו ככל האפשר.

לשם כך, נחפש מספר שלם המחלק את המונה ואת המכנה. נצמצם במספר זה; ונחזור על התהליך עם השבר החדש, עד שלא ניתן לצמצם יותר.  
שבר שלא ניתן לצמצם יותר נקרא **שבר מצומצם**.

לדוגמה, נתבונן בשבר  $\frac{18}{42}$ . המונה והמכנה מתחלקים ב־2. נצמצם:

$$\frac{18}{42} = \frac{18 : 2}{42 : 2} = \frac{9}{21}$$



בשבר  $9/21$ , המונה והמכנה לא מתחלקים ב-2, אך הם מתחלקים ב-3. נצמצם אפוא:

$$\frac{9}{21} = \frac{9:3}{21:3} = \frac{3}{7}$$

את התוצאה שקיבלנו אי אפשר לצמצם יותר, ולכן נסיים בכך. לסיכום:

$$\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

הערה: ניתן להגיע לתוצאה  $3/7$  בצעד אחד, על ידי צמצום השבר  $18/42$  ב-6:

$$\frac{18}{42} = \frac{18:6}{42:6} = \frac{3}{7}$$

## שאלה 16

צמצמו את השברים הבאים ככל הניתן:

- א.  $16/18$     ב.  $5/100$     ג.  $63/7$     ד.  $30/18$   
ה.  $20/21$     ו.  $15/18$     ז.  $70/42$     ח.  $1/10$

התשובה בעמוד 180

## חיבור שברים

כפי שראינו בעבר, פעולת החיבור במספרים טבעיים מייצגת איחוד של כמויות. גם שברים מייצגים כמויות. לדוגמה, נוכל לחשוב על השבר  $2/3$  כמייצג שני שלישים של תפוח, או שטח אדמה מסוים.

פעולת החיבור היא אפוא טבעית גם בשברים, ומייצגת איחוד של כמויות שבריות.

קל לחבר שברים בעלי מכנה זהה. לדוגמה, הביטוי

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

מייצג שני שלישים ועוד שלישי אחד, ובסך הכול שלושה שלישים:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

באופן כללי מתקיים:

**כדי לחבר שברים בעלי מכנה זהה, יש לחבר את המונים ולהשאיר את המכנה כפי שהוא.**

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \quad \text{לדוגמה:}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

שימו לב: בצעד האחרון צמצמנו את התוצאה. מקובל להציג את התוצאה הסופית כשבר מצומצם.

## שאלה 17

חברו את השברים הבאים. צמצמו את התוצאה ככל הניתן.

א.  $1/5 + 2/5$

ב.  $4/6 + 9/6$

ג.  $8/3 + 4/3$

ד.  $1/3 + 1/3$

ה.  $5/12 + 3/12$

ו.  $2/11 + 3/11 + 4/11$

התשובה בעמוד 181

## חיבור שברים בעלי מכנים שונים

נתבונן כעת במצב שבו יש לחבר שברים בעלי מכנים שונים. לדוגמה:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

במצב זה, נפעל כך: נרחיב את השברים, כדי להגיע למצב שבו המכנים שווים. ואז, נשתמש בכלל המוכר לחיבור שברים בעלי מכנים שווים.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

בדוגמה שלפנינו, נרחיב את השבר  $1/2$  בגורם 3:

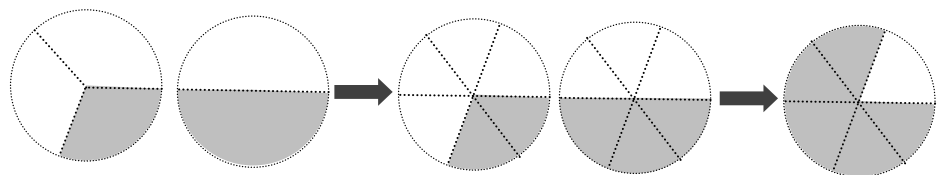
$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

כמו כן, נרחיב את השבר  $1/3$  בגורם 2:

כעת ביכולתנו לחבר את השברים, כשברים בעלי מכנה זהה:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

באופן גרפי ניתן לייצג את הפעולה שביצענו כך:



בפעולה שביצענו, הרחבנו את שני השברים כך שיהיה להם אותו מכנה. מכנה כזה נקרא **מכנה משותף**.

כיצד נוכל למצוא מכנה משותף?

ניעזר בכללים הבאים:

- **מכנה משותף הוא מספר המתחלק ללא שארית במכנים של השברים הנתונים.**

לדוגמה: 6 מתחלק ללא שארית ב-2 וגם ב-3, ולכן 6 הוא מכנה משותף של השברים  $\frac{1}{2}$  ו- $\frac{1}{3}$ .

- **מכפלת המכנים של השברים היא תמיד מכנה משותף.**

נבהיר: יש הרבה אפשרויות לבחירת מכנה משותף, וכולן טובות לצורך חיבור השברים. מכפלת המכנים היא האפשרות הפשוטה ביותר למציאה. יש מקרים שבהם אפשר למצוא מכנה משותף קטן יותר.

לדוגמה: נניח שאנו רוצים לחשב את הסכום

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$$

המכנים הם 4 ו-6.

המכפלה  $6 \cdot 4 = 24$  היא מכנה משותף של השברים. היא כמובן מתחלקת ללא שארית ב-4 וגם ב-6.

במקרה זה, יש מכנה משותף קטן יותר: 12. מספר זה מתחלק ללא שארית גם ב-4 וגם ב-6, ונוח יותר להשתמש בו כמכנה משותף.

נרחיב את השברים  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$  כך שהמכנה יהיה 12:

את השבר  $\frac{3}{4}$  נרחיב בגורם 3:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

את השבר  $\frac{5}{6}$  נרחיב בגורם 2:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

נחבר:

אולי תהיתם כיצד ידענו לבחור את גורמי ההרחבה, כך שיביאו את השברים אל המכנה המשותף. התשובה היא בכלל הבא:

**כדי לקבל את גורם ההרחבה של כל אחד מהשברים המחוברים, יש לחלק את המכנה המשותף במכנה השבר.**

לפי כלל זה, בדוגמה האחרונה:

$$12 : 4 = 3$$

• גורם ההרחבה של  $\frac{3}{4}$  הוא

$$12 : 6 = 2$$

• גורם ההרחבה של  $\frac{5}{6}$  הוא

נוכל לכתוב את דרך חישוב הסכום  $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$  באופן מקוצר כך:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{12} = \frac{19}{12}$$

מדרך כתיבה זו ניתן להבין מהו המכנה המשותף (12), ומהו גורם ההרחבה של כל אחד מהמחברים (3 ו-2).

נחזור כעת על חישוב הסכום  $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ , עם המכנה המשותף 24 (שהוא מכפלת המכנים של השברים הנתונים).

גורם ההרחבה של  $\frac{3}{4}$  יהיה  $6 = 24 : 4$ . נרחיב בגורם זה:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}$$

גורם ההרחבה של  $\frac{5}{6}$  יהיה  $4 = 24 : 6$ . נרחיב:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$$

עתה נחבר:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{18}{24} + \frac{20}{24} = \frac{38}{24}$$

התוצאה שקיבלנו אינה שבר מצומצם, כי המונה והמכנה מתחלקים ב-2. נצמצם אפוא:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{38}{24} = \frac{38 : 2}{24 : 2} = \frac{19}{12}$$

קיבלנו, כמובן, את אותה תוצאה כמו בדרך החישוב הקודמת.

באופן מקוצר נבטא חישוב זה כך:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$$

נסכם:

- כדי לחבר שברים, יש להביא אותם למכנה משותף, ואז לחבר את המונים.
- מכנה משותף ניתן לקחת את מכפלת המכנים, או כל מספר אחר שמתחלק ללא שארית במכנים של השברים המחוברים.
- גורם ההרחבה של כל מחובר שווה למכנה המשותף חלקי המכנה של המחובר.
- את התוצאה הסופית נביא לצורת שבר מצומצם, על ידי פעולת צמצום.

### שאלה 18

חברו את השברים הבאים:

א.  $3/5 + 4/7$       ב.  $3/10 + 1/14$       ג.  $8/5 + 7/10$   
 ד.  $1/4 + 1/5$       ה.  $20/3 + 20/4$       ו.  $2/18 + 2/16$

התשובה בעמוד 181

בשיטה שלמדנו ניתן לחבר יותר משני שברים. לדוגמה, נחשב את הסכום

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4}$$

לצורך כך, נמצא מכנה משותף. אחת האפשרויות היא להכפיל את שלושת המכנים:

$$3 \times 8 \times 4 = 96$$

אך ניתן למצוא מכנה משותף קטן יותר: מכפלת המכנים של שני השברים הראשונים,  $3 \times 8 = 24$ , מתחלקת גם במכנה 4, ולכן ניתן להסתפק בה (היא מתחלקת ב-3, 8 ו-4).

כעת נרחיב את השברים למכנה 24:

את השבר  $2/3$  נרחיב בגורם  $8 : 3 = 24$ ,  $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$

את השבר  $5/8$  נרחיב בגורם  $3 : 8 = 24$ ,  $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$

ואת השבר  $3/4$  נרחיב בגורם  $6 : 4 = 24$ ,  $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}$

נחבר:  $\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{16}{24} + \frac{15}{24} + \frac{18}{24} = \frac{16+15+18}{24} = \frac{49}{24}$

ניתן לכתוב חישוב מסוג זה באופן מקוצר, כך:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 8 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 6}{24} = \frac{49}{24}$$

### שאלה 19

חשבו את הסכומים הבאים:

א.  $1/2 + 1/3 + 1/4$       ב.  $3/5 + 5/3 + 4/15$   
 ג.  $8/7 + 12/5 + 15/2$       ד.  $3/10 + 4/15 + 9/4$

התשובה בעמוד 182

## שברים פשוטים ומדומים

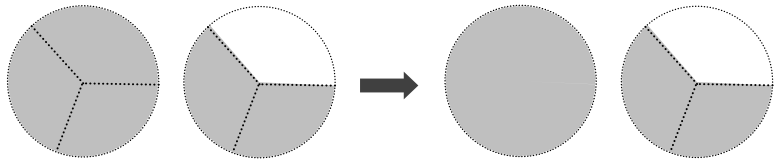
$$\frac{5}{3}$$

נתבונן בשבר:

שבר זה מייצג חמישה שלישים. ניתן להציגו כשלושה שלישים, שהם שלם אחד, ועוד שני שלישים:

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

בחישוב שערכנו הסתמכנו על החיבור של שברים בעלי מכנה זהה, באופן הפוך למה שהכרנו עד כה: הצגנו את  $\frac{5}{3}$  כ-  $\frac{3}{3}$  ועוד  $\frac{2}{3}$ . באופן גרפי ניתן לתאר תהליך זה כך:



באופן זה הצגנו את השבר  $\frac{5}{3}$  כמספר שלם (1) ועוד שבר "אמיתי" ( $\frac{2}{3}$ ).

נעבור למספר הגדרות:

- **שבר פשוט** הוא שבר שבו המונה קטן מהמכנה.  
לדוגמה: השברים  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{11}$  הם פשוטים.
- שבר שאינו פשוט נקרא **שבר מדומה**.  
לדוגמה: השברים  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{7}{3}$ ,  $\frac{12}{4}$ ,  $\frac{5}{5}$  הם מדומים.
- מספר המוצג כסכום של שלם ושבר פשוט נקרא **מספר מעורב**.  
לדוגמה:  $2 + \frac{1}{2}$  הוא מספר מעורב.

ניתן לכתוב מספר מעורב ללא פעולת החיבור בין השלם לשבר. לדוגמה:

במקום  $1 + \frac{1}{2}$  ניתן לכתוב  $1\frac{1}{2}$ ;

במקום  $1 + \frac{2}{3}$  ניתן לכתוב  $1\frac{2}{3}$ ;

במקום  $10 + \frac{3}{7}$  ניתן לכתוב  $10\frac{3}{7}$ .

בדוגמה שבה פתחנו, התבוננו בשבר  $5/3$ . שבר זה הוא מדומה, כי המונה גדול מהמכנה. ביטאנו שבר זה באופן הבא:

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$$

ניתן לאמר שבשבר המדומה  $5/3$  "הסתתר" שלם אחד. ביטאנו את השבר  $5/3$  כסכום של שלם זה, והשבר הפשוט  $2/3$ .

באופן כללי, ניתן להציג כל שבר מדומה כמספר מעורב או שלם, ולהפך: כל מספר מעורב או שלם ניתן להצגה כשבר מדומה.

### הצגת שבר מדומה כמספר מעורב או שלם

כאשר נתון שבר מדומה, נבצע פעולת חילוק בשלמים של המונה במכנה. אם אין שארית בחלוקה, הרי שהצגנו את השבר כמספר שלם.

אם יש שארית בחלוקה, נציג את המונה לפי הכלל

$$\text{שארית} + \text{מחלק} \times \text{מנה שלמה} = \text{מחולק}$$

כלומר:

$$\text{שארית} + \text{מכנה השבר המדומה} \times \text{מנה שלמה} = \text{מונה השבר המדומה}$$

כפי שנראה בדוגמה מייד, מכאן נתקבל התוצאה:

$$\frac{\text{השארית}}{\text{מכנה השבר המדומה}} + \text{המנה השלמה} = \text{השבר המדומה}$$

וכך מוצג השבר המדומה כשבר מעורב.

$$\frac{17}{5} \quad \text{לדוגמה, נתבונן בשבר}$$

שבר זה הוא שבר מדומה (כי 17 יותר גדול מ-5).

נבצע חילוק עם שארית של 17 ב-5: המנה השלמה היא 3, והשארית היא 2.

$$17 = 3 \times 5 + 2 \quad \text{מתקיים אפוא:}$$

$$\frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5} \quad \text{לפי חוק החיבור לשברים בעלי מכנה זהה,}$$

$$\frac{17}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5} \quad \text{ומכאן:}$$

כך הצגנו את השבר כמספר מעורב. אכן מתקיימת הנוסחה:

$$\frac{\text{השארית}}{\text{מכנה השבר המדומה}} + \text{המנה השלמה} = \text{השבר המדומה}$$

## שאלה 20

הציגו את השברים המדומים הבאים כמספרים מעורבים:

$$\text{א. } 8/3 \quad \text{ב. } 19/5 \quad \text{ג. } 100/7 \quad \text{ד. } 200/17$$

התשובה בעמוד 182

## שאלה 21

לגבי כל אחד מהשברים הבאים, קבעו אם השבר פשוט או מדומה. במקרה שהשבר מדומה, הציגו אותו כמספר מעורב או שלם.

$$\text{א. } 20/3 \quad \text{ב. } 2/3 \quad \text{ג. } 100/9 \quad \text{ד. } 42/6$$

$$\text{ה. } 13/15 \quad \text{ו. } 20/20 \quad \text{ז. } 80/24$$

התשובה בעמוד 182

## הצגת מספר מעורב או שלם כשבר מדומה

כדי להציג מספר מעורב או שלם כשבר מדומה, ניעזר בכלל הבא:

כל מספר שלם ניתן להצגה כשבר על ידי חלוקתו ב־1.

$$\text{לדוגמה: } 5 = \frac{5}{1}; \quad 7 = \frac{7}{1}; \quad 1 = \frac{1}{1}$$

כאשר נתון מספר מעורב, נציג את החלק השלם שלו כשבר (על ידי חלוקה ב־1), ונבצע חיבור שברים.

לדוגמה, נציג את  $2\frac{2}{3}$  כשבר מדומה:

$$2\frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2 + 2}{3} = \frac{8}{3}$$

כחלק מהפעולה ביצענו חיבור שברים בין  $2/1$  ל־  $2/3$ . המכנה המשותף במקרה זה הוא 3.

## שאלה 22

הציגו את המספרים הבאים כשברים מדומים:

$$\text{א. } 1\frac{1}{2} \quad \text{ב. } 3\frac{1}{3} \quad \text{ג. } 14\frac{5}{7} \quad \text{ד. } 5\frac{3}{100} \quad \text{ה. } 12$$

התשובה בעמוד 183

## שאלה 23

חשבו את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } 1\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5} \quad \text{ב. } 11\frac{2}{3} + 14\frac{3}{4} \quad \text{ג. } 5\frac{1}{3} + \frac{1}{8}$$

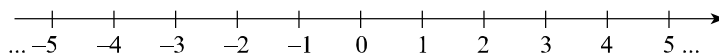
**הדרכה:** בטאו את המספרים המעורבים כשברים מדומים, ובצעו חיבור שברים רגיל. לאחר מכן העבירו את התוצאה לצורת מספר מעורב.

התשובה בעמוד 183

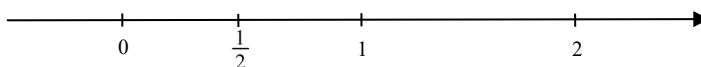


## הצגת שברים על פני ציר המספרים

נזכור כי המספרים השלמים מוצגים על פני ציר המספרים באופן הבא:

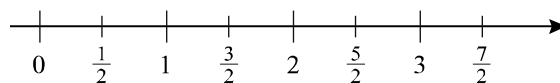


המרחק בין כל שני מספרים סמוכים על ציר המספרים מייצג יחידה אחת. נוכל לחלק יחידה זו לחלקים כדי לייצג שברים. לדוגמה, אם נחלק את הקטע בין הראשית (0) לנקודה 1 לשני חלקים שווים, נקבל את הנקודה  $1/2$  על ציר המספרים:

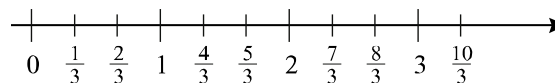


נקודה זו נמצאת במרחק של  $1/2$  מהראשית.

נמשיך ונציג כפולות של  $1/2$  על פני ציר המספרים הממשיים:

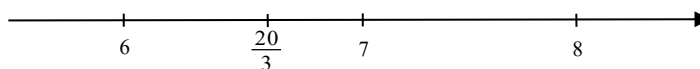


באותו אופן נוכל להציג כפולות של  $1/3$  על פני הציר:



וכן הלאה, על ידי חלוקת הקטעים שבין מספרים שלמים למרווחים שווים, ניתן לשייך נקודה על ציר המספרים הממשיים לכל שבר חיובי.

כדי לדעת בין איזה מספרים שלמים מוצג שבר נתון, יש להציגו כמספר מעורב. לדוגמה, הצגתו של השבר המדומה  $20/3$  כמספר מעורב היא  $20/3 = 6\frac{2}{3}$ . הנקודה המתאימה למספר זה נמצאת בשני שליש הדרך בין 6 ל-7:



## שאלה 24

מצאו את הנקודות על פני ציר המספרים הממשיים המתאימות לשברים הבאים:

א.  $2/7$       ב.  $10/3$       ג.  $23/5$       ד.  $34/17$

התשובה בעמוד 183

**שברים שליליים**

עסקנו בינתיים רק בשברים חיוביים, כלומר, בשברים שבהם המונה והמכנה הם מספרים שלמים וחייביים.

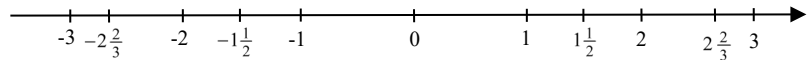
נעבור לדון בשברים שליליים. שבר שלילי הוא מספר נגדי לשבר חיובי, ומצוין על ידי סימן מינוס (-).

לדוגמה:

$-1/2$  (מינוס חצי) הוא המספר הנגדי ל- $1/2$ .

$-2\frac{2}{3}$  (מינוס שניים ושני שליש) הוא המספר הנגדי למספר המעורב  $2\frac{2}{3}$ .

נוכל להציג את השברים השליליים על פני ציר המספרים. כל שבר שלילי הוא תמונת מראה, ביחס לראשית, של השבר החיובי המתאים לו:



כעת נוכל לחלק כל מספר שלם, בכל מספר שלם אחר שאינו אפס, ולקבל תוצאה שהיא שבר. החוקים המאפשרים ביצוע פעולה זו דומים לחוקי הסימנים בכפל:

- בחלוקת מספרים שלמים (שונים מאפס), מתקיימים חוקי הסימנים הרגילים:  
חיובי / חיובי = חיובי, חיובי / שלילי = שלילי,  
שלילי / חיובי = שלילי, שלילי / שלילי = חיובי.

ניתן לסכם זאת בטבלה:

|            |            |            |
|------------|------------|------------|
|            | מכנה חיובי | מכנה שלילי |
| מונה חיובי | שבר חיובי  | שבר שלילי  |
| מונה שלילי | שבר שלילי  | שבר חיובי  |

- הערך המוחלט של שבר שווה למנת הערכים המוחלטים של המונה והמכנה.

- 0 חלקי כל מספר = 0.

### דוגמאות:

א. לפי הכלל: חיובי / שלילי = שלילי,  $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

ב. לפי הכלל: שלילי / חיובי = שלילי,  $\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

ג. לפי הכלל: שלילי / שלילי = חיובי,  $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

### שאלה 25

פשטו את השברים הבאים, והציגו כל אחד כשבר פשוט, מספר שלם או מספר מעורב:

א.  $\frac{-3}{4}$  ב.  $\frac{-2}{-4}$  ג.  $\frac{-9}{2}$  ד.  $\frac{0}{10}$   
ה.  $\frac{-15}{3}$  ו.  $\frac{2}{-1}$  ז.  $\frac{-1}{-1}$  ח.  $\frac{90}{-17}$

התשובה בעמוד 183

### חיסור שברים

מכיוון שכבר למדנו את פעולת החיבור בשברים, נוכל ללמוד חישקל את פעולת החיסור בהם. פעולה זו מתבצעת לפי הכלל הבא:

**כדי לחסר שברים בעלי מכנה זהה, נחסר בין המונים, ונשאר את המכנה כפי שהוא.**

לדוגמה: אם נחסר רבע אחד משלושה רבעים, נקבל שני רבעים. ובמספרים –

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

אם נרצה לחסר שני שברים בעלי מכנים שונים, נרחיב אותם למכנה משותף, ונחסר אותם לפי הכלל הקודם.

לדוגמה, כדי לחשב את ההפרש  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

נמצא מכנה משותף: 6 (מכפלת המכנים) הוא מכנה משותף.

נרחיב את המחוסר והמחסר אל המכנה המשותף:  $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ ,  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

לבסוף, נחסר:  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

נוכל לבטא את החישוב שערכנו באופן מקוצר כך:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{6} = \frac{1}{6}$$

כדי להיווכח שהגענו לתוצאה הנכונה, נחבר:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

בדוגמה הבאה, תוצאת החיסור היא מספר שלילי:

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{8}{20} - \frac{15}{20} = \frac{8-15}{20} = \frac{-7}{20} = -\frac{7}{20}$$

במספרים שלמים הכרנו את הכלל "החלפת סדר המחסר והמחוסר מובילה לתוצאה נגדית לתוצאה המקורית". כלל זה נכון גם בשברים.

אם נחליף בדוגמה האחרונה את סדר המחסר והמחוסר, נקבל:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$$

## שאלה 26

חשבו:

$$\begin{array}{llll} \text{א. } 3/4 - 1/5 & \text{ב. } 2/3 - 1/10 & \text{ג. } 3/4 - 5/3 & \text{ד. } 6/10 - 9/15 \\ \text{ה. } 6 - 2/3 & \text{ו. } 1/4 - 1 & \text{ז. } 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} & \text{ח. } 8 - 3\frac{1}{3} \end{array}$$

התשובה בעמוד 183

## חיבור וחיסור הכולל שברים שליליים

כדי לבצע חיבור וחיסור של שברים חיוביים או שליליים, נדאג להציג את השברים כך שהמכנים שלהם יהיו מספרים חיוביים. כדי להציג אותם בצורה זו, ניעזר בחוקי הסימנים של פעולת החילוק.

$$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

לדוגמה:

$$\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$$

כך עברנו ממצב של מכנה שלילי למצב של מכנה חיובי.

לאחר שווידאנו שהמכנים חיוביים, נוכל לחבר או לחסר לפי הכללים הרגילים: מציאת מכנה משותף, הרחבה אל המכנה המשותף, וביצוע חיבור או חיסור (בהתאם למקרה) של מוני השברים.

## דוגמאות:

$$\frac{1}{3} + \frac{-4}{5}$$

א. נחשב את ערך הסכום

במקרה זה המכנים חיוביים. נרחיב אל המכנה המשותף 15, ונחבר:

$$\frac{1}{3} + \frac{-4}{5} = \frac{5}{15} + \frac{-12}{15} = \frac{5+(-12)}{15} = \frac{5-12}{15} = \frac{-7}{15} = -\frac{7}{15}$$

◁ הרחבנו:

$$\frac{-4}{5} = \frac{(-4) \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{-12}{15}$$

דרך פתרון נוספת היא שימוש בכלל "חיסור שקול לחיבור הנגדי" – שהכרנו במספרים השלמים. כלל זה תקף גם לגבי שברים. לפיו נקבל:

$$\frac{1}{3} + \frac{-4}{5} = \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{5-12}{15} = \frac{-7}{15} = -\frac{7}{15}$$

$$\frac{4}{-3} - \frac{-2}{-7} \quad \text{ב. כדי לחשב את}$$

$$\frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3}; \quad \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7} \quad \text{נבטא תחילה, לפי חוקי הסימנים:}$$

$$\frac{4}{-3} - \frac{-2}{-7} = \frac{-4}{3} - \frac{2}{7} = \frac{-28-6}{21} = \frac{-34}{21} = -\frac{34}{21} \quad \text{נקבל:}$$

## שאלה 27

חשבו:

התשובה בעמוד 184

$$\text{א. } \frac{2}{3} - \frac{1}{-5} \quad \text{ב. } -\frac{1}{2} + \frac{2}{-3} \quad \text{ג. } \frac{-3}{-4} + \frac{9}{-2} \quad \text{ד. } \frac{4}{9} - \frac{8}{7} - \frac{2}{3}$$

## כפל שברים

הכלל המאפשר הכפלה של שברים הוא פשוט מאוד:

**כדי להכפיל שני שברים זה בזה, יש לכפול את המונה במונה ואת המכנה במכנה.**

כלומר: כדי להכפיל שני שברים, ניצור שבר חדש שבו המונה הוא מכפלת המונים של השברים, והמכנה הוא מכפלת מכניהם.

נראה מספר דוגמאות, ונבחן את משמעותן:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \quad \text{א. נחשב את המכפלה}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15} \quad \text{לפי כלל הכפל:}$$

משמעות תוצאה זו היא ששליש של חמישית הוא  $1/15$ .

ואכן: אם ניקח שלם ונחלק אותו לחמישה חלקים שווים, ולאחר מכן נחלק כל חלק לשלושה חלקים שווים, בסך הכול יחולק השלם לחמישה עשר חלקים. במקרה זה כל חמש-עשרית תהיה שליש של החמישית המתאימה לה.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \quad \text{ב. נחשב את המכפלה}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15} \quad \text{לפי כלל הכפל:}$$

### שיעור 1: אריתמטיקה 43

משמעות תוצאה זו היא ששני שלישים מ-  $\frac{4}{5}$  הם  $\frac{8}{15}$ .

ואכן: כפי שראינו בדוגמה הקודמת, שלישי אחד של  $\frac{1}{5}$  הוא  $\frac{1}{15}$ . לכן שלישי של  $\frac{4}{5}$  הוא  $\frac{4}{15}$ . ולבסוף, שני שלישים של  $\frac{4}{5}$  הם  $\frac{8}{15}$ .

ג. נכפיל  $8 \cdot \frac{2}{3}$

לצורך כך, נציג את 8 כשבר:  $8 = \frac{8}{1}$

כעת ניתן להכפיל לפי הכלל הרגיל:  $8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{16}{3}$

תוצאה זו מתיישבת עם ההיגיון, שכן אם נחשוב על  $\frac{2}{3}$  כשתי כמויות של שלישי אחד, הכפלה ב-8 תיתן 16 כמויות כאלה, כלומר שישה עשר שלישים. באופן כללי, ניתן להסיק מכלל הכפל את הכלל הבא:

**כדי להכפיל שבר במספר שלם יש להכפיל את מונה השבר במספר השלם, ולהשאיר את המכנה כפי שהוא.**

ד. נכפיל  $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$

לצורך כך נציג  $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$

וניעזר בכלל הכפל:  $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{-2}{5} = \frac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot 5} = \frac{-6}{20} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$

ניתן להגיע לתוצאה זו בדרך אחרת, לפי כלל הסימנים וכלל הערך המוחלט של מכפלה (כללים אלה תקפים גם בשברים): מכפלת הערכים המוחלטים של הגורמים היא

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

ולפי כלל הסימנים, המכפלה  $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$  היא שלילית, לכן היא שווה ל-  $-\frac{3}{10}$ .

נתרגל את השימוש בכלל הכפל:

### שאלה 28

חשבו:

א.  $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}$       ב.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$       ג.  $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$       ד.  $9 \cdot \frac{2}{3}$

ה.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$       ו.  $\frac{4}{5} \cdot \frac{-2}{3}$       ז.  $1\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$       ח.  $\frac{1}{2} \cdot 0$

## המספר ההופכי

לפני שנתאר את פעולת החילוק בשברים, נציג את המושג הבא:

**המספר ההופכי לשבר נתון הוא השבר המתקבל ממנו על ידי החלפת המונה ומהמכנה.**

בהתאם להגדרה זו:

- המספר ההופכי ל- $\frac{2}{3}$  הוא  $\frac{3}{2}$
- המספר ההופכי ל- $\frac{7}{3}$  הוא  $\frac{3}{7}$
- המספר ההופכי ל- $\frac{1}{3}$  הוא  $\frac{3}{1}$ , כלומר 3.
- המספר ההופכי ל- $\frac{-2}{5}$  הוא  $\frac{5}{-2}$ , כלומר  $-\frac{5}{2}$ .

נוכל לחשב גם את ההופכי של מספר שלם. לצורך כך נציג את השלם כשבר.

לדוגמה:

- המספר 3 שווה ל- $\frac{3}{1}$ , לכן ההופכי שלו הוא  $\frac{1}{3}$ .
- המספר -2 שווה ל- $\frac{-2}{1}$ , לכן ההופכי שלו הוא  $\frac{1}{-2}$ , כלומר  $-\frac{1}{2}$ .

המספר היחיד שלא מוגדר לו הופכי הוא 0. הסיבה לכך היא שלביטוי " $\frac{1}{0}$ " אין משמעות של שבר.

אם נכפיל מספר בהופכי שלו, נקבל מונה ומכנה זהים, ולכן התוצאה תצטמצם ל-1. לדוגמה:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

ננסח אפוא את הכלל:

**מכפלה של מספר והמספר ההופכי שלו שווה תמיד ל-1.**

## שאלה 29

חשבו את ההופכיים של המספרים הבאים, וודאו בכל מקרה, שמכפלת המספר וההופכי לו שווה ל-1.

- |                  |       |                   |      |
|------------------|-------|-------------------|------|
| א. $\frac{3}{4}$ | ב. 5  | ג. $1\frac{1}{2}$ | ד. 1 |
| ה. -1            | ו. -3 | ז. $-\frac{4}{7}$ |      |

התשובה בעמוד 185

## חילוק שברים

נגדיר כעת את פעולת החילוק בין שברים. בשברים חיוביים, פעולה זו עונה על השאלה: "כמה פעמים נכנס שבר אחד בשבר אחר". התשובה, כמובן, יכולה להיות בעצמה שבר.

הנה הכלל המגדיר את פעולת החילוק:

**כדי לחלק מספר (שלם או שבר) במספר אחר (שלם או שבר), יש להכפיל את המספר בהופכי של המספר האחר.**

בניסוח מקוצר נוכל לאמר כך: חילוק שקול לכפל במספר ההופכי.

נתבונן במספר דוגמאות:

א. נתבונן במנה  $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

מנה זו מייצגת את פעולת החילוק של שני שליש בשלושה רבעים. ניתן לכתוב אותה גם כך:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

כדי לחשב מנה זו, נכפיל את  $\frac{2}{3}$  בהופכי של  $\frac{3}{4}$ , כלומר ב-  $\frac{4}{3}$ :

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

משמעות תוצאה זו היא ש-  $\frac{3}{4}$  "נכנס" בדיוק  $\frac{8}{9}$  פעמים ב-  $\frac{2}{3}$ . ואכן:

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3}$$

שמונה תשיעיות של  $\frac{3}{4}$  הן  $\frac{2}{3}$ .



ב. כדי לחלק 4 ב- $\frac{1}{2}$ , נכפיל את 4 בהופכי של  $\frac{1}{2}$ , כלומר ב-2:

$$4 : \frac{1}{2} = 4 \cdot 2 = 8$$

ואכן, חצי נכנס בדיוק 8 פעמים ב-4.

ג. כדי לחלק  $\frac{2}{3}$  ב-6, נכפיל את  $\frac{2}{3}$  בהופכי של 6, כלומר ב- $\frac{1}{6}$ :

$$\frac{2}{3} : 6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

נשים לב שכדי לחלק ב-6 הכפלנו את מכנה השבר  $\frac{2}{3}$  ב-6.  
באופן כללי, ניתן להסיק מכלל החילוק את הכלל הבא:

**כדי לחלק שבר במספר שלם, יש להכפיל את מכנה השבר במספר השלם, ולהשאיר את המונה כפי שהוא.**

ד. אם נחלק 1 ב- $\frac{2}{3}$  נקבל  $1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

קיבלנו  $\frac{3}{2}$ , שהוא ההופכי ל- $\frac{2}{3}$ .  
כללית יותר, מתקיים הכלל הבא:

**ההופכי של כל מספר (שונה מאפס) שווה ל-1 חלקי המספר.**

### שאלה 30

בצעו את פעולות החילוק הבאות:

|                                |                                |                                  |                                                            |
|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------------|
| א. $\frac{3}{2} : \frac{2}{5}$ | ב. $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ | ג. $1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$ | ד. $\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right)$ |
| ה. $\frac{5}{3} : 2$           | ו. $2 : \frac{5}{3}$           | ז. $\frac{4}{3} : \frac{2}{9}$   | ח. $3 : \left(-\frac{3}{5}\right)$                         |

התשובה בעמוד 185

### סיכום – ארבע פעולות החשבון

הנה כי כן, סיימנו ללמוד את הכללים הבסיסיים של ארבע פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל וחילוק, במספרים שלמים ובשברים. בתוך כך, הכרנו את:

- חוקי החילוף והקיבוץ בחיבור ובכפל
- סדר הפעולות
- חוקי הסימנים בכפל ובחילוק
- כללים לחיבור וחיסור המערבים מספרים שליליים
- כללי החיבור והחיסור לשברים בעלי מכנה זהה
- הרחבה וצמצום של שברים
- כללי הכפל והחילוק של שברים
- הצגת שבר מדומה כמספר מעורב או שלם, ולהפך

## שיעור 1: אריתמטיקה 47

בשאלות הבאות מגולם השימוש בכללים אלה. פתרו אותן כדי לבחון את עצמכם, והיעזרו בפתרונות המפורטים כדי לחזור על הכללים והשימוש בהם.

### שאלה 31

חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $2 - 5 - 6 - (1 - 2)$       ב.  $-3 - 5 \cdot 7 + 1$

ג.  $((2 - 3) \cdot (-5) \cdot (-6) + 12) \cdot 2 - 3$       ד.  $\left(\frac{2}{7} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{12}{7}$

ה.  $8\frac{2}{3} - 5\frac{3}{4}$       ו.  $\frac{4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{7}}$

התשובה בעמוד 186

### העלאה בריבוע

פעולת הכפל של מספר בעצמו נקראת **העלאה בריבוע**. פעולה זו מסומנת על ידי ציון הספרה המוקטנת 2 בפינה הימנית העליונה של המספר.

כך, לדוגמה:  $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

ובמילים – שלוש בריבוע שווה לתשע.

דוגמאות נוספות:  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

### שאלה 32

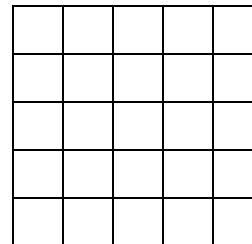
א. חשבו את ריבועי כל המספרים השלמים שבין 1 ל-10.

ב. חשבו:  $(-3)^2$ ,  $(2/3)^2$ ,  $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ .

ג. האם ריבוע של מספר יכול להיות מספר שלילי?

התשובה בעמוד 187

כדי להסביר את מקור השם "העלאה בריבוע", נתבונן באיור הבא:



באיור זה מופיע ריבוע גדול, המחולק לריבועים קטנים. כל צלע של הריבוע הגדול מחולקת ל-5 חלקים, ובסך הכול מספר הריבועים הקטנים הוא

$5 \times 5 = 5^2 = 25$

אם שטחו של כל ריבוע קטן הוא יחידה אחת, אז שטח הריבוע הגדול הוא 25 יחידות.

באופן כללי, בכדי לחשב את שטחו של ריבוע, יש להכפיל את אורך הצלע בעצמו – כלומר להעלות את אורך הצלע בריבוע.

## פעולת החזקה

בדומה להעלאה בריבוע, ניתן להכפיל מספר בעצמו כמה וכמה פעמים. פעולה זו נקראת **חזקה**.

המספר שאותו מכפילים בעצמו נקרא **בסיס החזקה**.  
מספר ההכפלות של הבסיס בעצמו נקרא **מעריך החזקה**.  
הסימון המתמטי של פעולת החזקה הוא ציון המעריך בפינה הימנית העליונה של הבסיס.

### דוגמאות:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2 \text{ בחזקת } 2 \text{ (או: } 2 \text{ בריבוע)} & 2 \times 2 &= 4 \\ 2^3 &= 2 \text{ בחזקת } 3 \text{ (או: } 2 \text{ בשלישית)} & 2 \times 2 \times 2 &= 8 \\ 5^4 &= 5 \text{ בחזקת } 4 \text{ (או: } 5 \text{ ברביעית)} & 5 \times 5 \times 5 \times 5 &= 625 \end{aligned}$$

## שאלה 33

חשבו את החזקות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א. } & 3^2, 3^3, (-2)^3, (-1)^5, (2/3)^3, (-1/2)^4 \\ \text{ב. } & 2^4, 2^5, 2^6, \dots, 2^{10} \end{aligned}$$

התשובה בעמוד 187

קל להניב מספרים עצומים באמצעות פעולת החזקה. לדוגמה, אם נכפיל את 2 בעצמו מאה פעמים, נקבל:

$$2^{100} = 1267650600228229401496703205376$$

שימו לב שפעולת החזקה אינה מקיימת את חוקי החילוף והקיבוץ (שכזכור, מתקיימים לגבי פעולות החיבור והכפל). לדוגמה:

$$\begin{aligned} 3^5 &= 243 \text{ ו- } 5^3 = 125, \text{ לכן } 3^5 \neq 5^3. \\ (2^3)^4 &= 8^4 = 4096, \text{ ו- } 2^{(3^4)} = 2^{81} \text{ (מספר עצום בגודלו), לכן } (2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}. \end{aligned}$$

מבחינת סדר הפעולות, העלאה בחזקה קודמת לפעולות החשבון. לכן:

$$5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$$

אם מעריך החזקה הוא בעצמו ביטוי, יש לחשב אותו תחילה.

$$2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64 \quad \text{לכן:}$$

## שאלה 34

התשובה בעמוד 187

$$2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^{1+3} - 4^{3-1}$$

חשבו:

נוסיף ונגדיר את פעולת החזקה במקרים שהמעריך הוא 0 או 1:

• כל מספר בחזקת 1 שווה לעצמו.

• כל מספר בחזקת 0 שווה ל-1.

לדוגמה, נכתוב חזקות של 2 בסדר יורד:

:

$$2^4 = 16$$

$$2^3 = 8$$

$$2^2 = 4$$

$$2^1 = 2$$

$$2^0 = 1$$

הגדרת החזקות  $2^0$ ,  $2^1$  תואמת לכך שכל מספר ברשימה זו שווה למחצית המספר שבשורה מעליו.

נוכל להמשיך את הרשימה, ולקבל חזקות שליליות:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$

:

באופן דומה, ניתן לכתוב חזקות חיוביות ושליליות של 3:

:

$$3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^0 = 1$$

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

:

ניתן לראות שמתקיים הכלל הבא:

**חזקה במעריך שלילי היא המספר ההופכי לחזקה במעריך הנגדי.**

לפי כלל זה:

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$$

### שאלה 35

חשבו:

א.  $4^{-2}$       ב.  $(-4)^2$       ג.  $(-4)^{-2}$       ד.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

ה.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$       ו.  $(-1)^{-1}$

התשובה בעמוד 188

### ההצגה העשרונית

נתבונן בחזקות של המספר 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

באופן כללי, חזקה טבעית של 10 היא מספר המורכב מהספרה 1, ולימינה אפסים, שמספרם שווה למעריך החזקה.

שיטת הייצוג העשרונית מבוססת על חזקות אלה. בשיטה זו, ערכה של כל ספרה נקבע לפי מיקומה.

הספרה הימנית ביותר היא ספרת האחדות (מתאימה לכפולות של  $10^0 = 1$ );  
הספרה השנייה מימין היא ספרת העשרות (מתאימה לכפולות של  $10^1 = 10$ );  
הספרה השלישית מימין היא ספרת המאות (מתאימה לכפולות של  $10^2 = 100$ );  
וכן הלאה.

לדוגמה:

$$\begin{aligned} 79 &= 70 + 9 &= 7 \cdot 10 + 9 &= 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \\ 234 &= 200 + 30 + 4 &= 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4 &= 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \\ 5402 &= 5000 + 400 + 2 &= 5 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 2 &= 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

## שיעור 1: אריתמטיקה 51

### שאלה 36

בטאו באמצעות חזקות של 10 את המספרים הבאים:

התשובה בעמוד 188

ד. 190000001

ג. 3030

ב. 102

א. 25

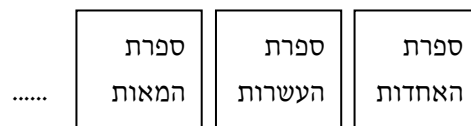
### שאלה 37

חשבו את ערך הביטוי  $10^{10} - 1$ .

התשובה בעמוד 188

## שברים עשרוניים

נתבונן במבנה ההצגה של מספר בשיטה העשרונית:



ניתן לרשום ספרות מימין לספרת האחדות, והן יתרמו ערכים שבריים. כדי להפריד בין ספרת האחדות לספרות שממין לה, מציינים נקודה הנקראת **הנקודה העשרונית**. מתקבל המבנה הבא:



לדוגמה, המספר 15.23 שווה ל-15, ועוד 2 עשיריות, ועוד 3 מאיות, כלומר

$$15.23 = 15 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$$

$$= 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

מספר מסוג זה נקרא **שבר עשרוני**.

נוכל להציג את השבר העשרוני 15.23 מהדוגמה האחרונה, כשבר מעורב וגם כשבר מדומה:

$$15.23 = 15 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} = 15 + \frac{20}{100} + \frac{3}{100} = 15 \frac{23}{100} = \frac{1523}{100}$$

### שאלה 38

הציגו את השברים העשרוניים הבאים כשברים פשוטים, מעורבים ו/או מדומים, בהתאם למקרה:

ד. 0.5

ג. 13.001

ב. 10.35

א. 1.1

התשובה בעמוד 188

ז. -11.5

ו. 0.000003

ה. 0.01

### שאלה 39

הציגו את השברים הבאים כשברים עשרוניים:

- א.  $\frac{1}{2}$       ב.  $\frac{1}{4}$       ג.  $\frac{3}{10}$       ד.  $\frac{3}{8}$

הדרכה: הרחיבו כל שבר כך שהמכנה יהיה חזקה של 10.

התשובה בעמוד 189

### אחוזים

נכיר עתה סוג מסוים של שברים, הנפוץ מאוד בשפת היומיום: אחוזים.

הסימן לאחוזים הוא %, ומאה אחוזים מייצגים שלם אחד:  $100\% = 1$

בהתאם לכך, אחוז אחד הוא מאית:  $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$

עשרה אחוז הם עשירית:  $10\% = \frac{1}{10} = 0.1$

חמישים אחוז הם חצי:  $50\% = \frac{1}{2} = 0.5$

כללית, כל מספר של אחוזים ניתן להמרה לשבר רגיל (או למספר שלם) על ידי חלוקה ב-

100; ושבר או שלם ניתנים להמרה לאחוזים על ידי הכפלה ב-100.

בדרך כלל משתמשים באחוזים כדי לציין חלק מסוים מתוך מספר. נדגים:

א. 50% מ-12 הם  $50\% \times 12 = \frac{50}{100} \times 12 = \frac{1}{2} \times 12 = 6$

ב. 120% מ-7 הם  $120\% \times 7 = \frac{120}{100} \times 7 = 1.2 \times 7 = 8.4$

### שאלה 40

חשבו:

א. 20% מתוך 15.      ב. 12% מתוך 3.

ג. 200% מתוך 40.      ד. כמה אחוזים הם 15 מתוך 20?

התשובה בעמוד 189

### שאלה 41

א. בשבוע שעבר היה מחיר קילו עגבניות 8 שקלים. השבוע המחיר התייקר ב-20%. מה

המחיר כעת?

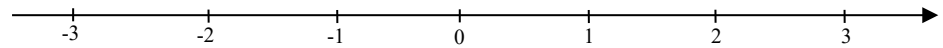
ב. מחירו של ספר 70 שקלים, והוא נמכר במהלך 'שבוע הספר' ב-30% הנחה. מהו מחיר

הספר לאחר ההנחה?

התשובה בעמוד 189

**שברים עשרוניים במבט גיאומטרי**

כידוע, המספרים השלמים ממוקמים על ציר המספרים הממשיים במרחקים של יחידה זה מזה:

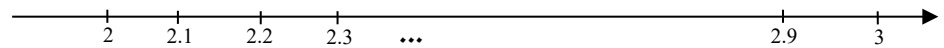


ככל שנחלק מרווחים אלה לחלקים קטנים יותר, כך תגדל יכולתנו לתאר במדויק את מיקומן של נקודות על פני הישר.

אם נחלק, למשל, את הקטע שבין 2 ל-3 לעשרה חלקים שווים, נקודות החלוקה תהיינה

$$2.1, 2.2, 2.3, \dots, 2.9$$

חלוקה זו נראית כך:



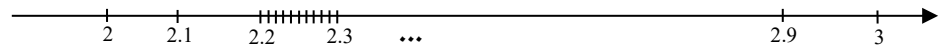
אורכו של כל חלק שהתקבל הוא  $1/10$ .

ניתן לבחור כל אחד מחלקים אלה, ולחלק אותו ל-10 חלקים קטנים יותר. אורכו של כל חלק יהיה מאית.

אם, למשל, נחלק את הקטע שבין 2.2 ל-2.3 לעשרה חלקים שווים, נקודות החלוקה תהיינה

$$2.21, 2.22, 2.23, \dots, 2.29$$

על פני האיור הקודם, נקודות אלה ימוקמו כך:



כך ניתן להמשיך עד לכל רמת דיוק שנרצה.

ניתן לראות את הספרות של שבר עשרוני כ"הוראות הגעה" המאפשרות לאתר את המספר על ציר המספרים.

יש מספרים שלא ניתן לתארם על ידי מספר סופי של ספרות. לדוגמה, המספר  $1/3$  הוא בעל ייצוג עשרוני אינסופי:

$$\frac{1}{3} = 0.3333\dots$$

השברים העשרוניים 0.3, 0.33, 0.333 וכו' הם קירובים למספר  $1/3$ . ככל שנוסיף ספרות כך נתקרב למספר המדויק.



ניתן למצוא את הייצוג העשרוני (סופי או אינסופי) של כל שבר בשיטת החילוק הארוך.  
נדגים זאת עבור השבר  $3/7$ :

0.42857142...

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 7} \\ \underline{2} \phantom{8} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \end{array}$$

ייצוג זה הוא מחזורי: הרצף 428571 חוזר על עצמו שוב ושוב,

$$\frac{3}{7} = 0.428571 \, 428571 \, 428571 \, ....$$

תופעה זו קורית תמיד בחלוקה של מספרים שלמים זה בזה. הייצוג העשרוני של המנה הוא שבר עשרוני סופי, או שבר עשרוני אינסופי מחזורי.

תנו דעתכם לכך שייצוג עשרוני אינסופי אינו מעיד על גודלו של המספר. למשל, ל- $1/3$  יש ייצוג עשרוני אינסופי, ול- $1/2$  ייצוג עשרוני סופי:  $1/2 = 0.5$ , אך  $1/3$  קטן יותר מ- $1/2$ .

התופעה שראינו מתקיימת גם בכיוון ההפוך: כל שבר עשרוני אינסופי מחזורי מייצג מנה של מספרים שלמים.

מספר שהוא מנה של מספרים שלמים נקרא **מספר רציונלי**. (עד לשלב זה קראנו למספר כזה "שבר", אך מספר רציונלי הוא המונח המתמטי הרשמי והמקובל).

כל המספרים שבהם נתקלנו עד לשלב זה, היו רציונליים. בהמשך, ניתקל במספרים שאינם רציונליים. מספר כזה, הנקרא **מספר אי־רציונלי**, מתאים לנקודה על ציר המספרים, אך אינו ניתן לביטוי כתוצאת חלוקה של שני מספרים שלמים. בהתאם לכך, מספר כזה ניתן להצגה כשבר עשרוני אינסופי, שאין בו חוקיות מחזורית.

כלל המספרים, המתאימים לנקודות על ציר המספרים (בין אם רציונליים ובין אם אי־רציונליים), נקראים **מספרים ממשיים**.

## שאלה 42

מקמו על ציר המספרים את:

התשובה בעמוד 190

א. 0.1      ב. 1.3      ג. 1.15      ד. -0.7

## שורשים

פעולת ההעלאה בריבוע מתבצעת, כזכור, על ידי כפל של מספר בעצמו.

לדוגמה:  $2^2 = 4$ ,  $3^2 = 9$ ,  $4^2 = 16$ 

פעולת השורש היא פעולה הפוכה לפעולת ההעלאה בריבוע. פעולה זו מוגדרת רק עבור מספרים שאינם שליליים.

השורש של מספר הוא מספר אי־שלילי, אשר אם נעלה אותו בריבוע, נקבל את המספר המקורי.

בהתאם לכך, השורש של 4 הוא 2. מסמנים זאת כך:  $\sqrt{4} = 2$ ואכן, אם נעלה את 2 בריבוע, נקבל בחזרה את 4:  $(\sqrt{4})^2 = 2^2 = 4$ בדומה, השורש של 9 הוא 3:  $\sqrt{9} = 3$ ובהתאם לכך:  $3^2 = 9$ 

## שאלה 43

חשבו:

התשובה בעמוד 190

א.  $\sqrt{100}$       ב.  $\sqrt{16}$       ג.  $\sqrt{25}$       ד.  $\sqrt{1}$ 

יש מספרים שלמים שאינם ריבוע של מספר שלם, ובהתאם לכך, השורש שלהם אינו מספר שלם. יתרה מכך, שורש של מספר כזה אינו רציונלי – כלומר, אינו ניתן לביטוי כמנה בין מספרים שלמים. בהתאם לכך, יש לשורש כזה ייצוג עשרוני אינסופי חסר מחזוריות.

לדוגמה, 2 אינו ריבוע של מספר שלם, ולכן  $\sqrt{2}$  אינו מספר רציונלי. זהו מספר ממשי, בעל ייצוג עשרוני אינסופי המתחיל כך:

$$\sqrt{2} = 1.4142356237309...$$

נוכל לבטא באופן מקורב:  $\sqrt{2} \approx 1.4142$ 

השבר העשרוני הסופי 1.4142 אינו שווה למספר  $\sqrt{2}$ , אך המרחק בין שני מספרים אלה אינו עולה על 0.0001.

**שורשים מסדר גבוה**

השורש הריבועי נקרא גם שורש מסדר 2.

ניתן להגדיר שורשים מסדר גבוה יותר:

**השורש השלישי** הוא הפעולה ההפוכה להעלאה בחזקת 3. הוא מסומן כך:  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ .

לדוגמה,  $2^3 = 8$ , ובהתאם –  $\sqrt[3]{8} = 2$

כלומר, השורש השלישי של 8 הוא 2.

באופן דומה מוגדר שורש רביעי ( $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ ), שורש חמישי ( $\sqrt[5]{\phantom{x}}$ ) וכן הלאה.

**שאלה 44**

חשבו:

התשובה בעמוד 190

א.  $\sqrt[3]{27}$       ב.  $\sqrt[3]{1000}$       ג.  $\sqrt[5]{32}$       ד.  $\sqrt[4]{256}$

**סיכום שיעור 1**

בשיעור זה למדנו את יסודות החשבון: הכללים הבסיסיים של פעולות החיסור, החיבור, הכפל והחילוק, וסדר הפעולות ביניהם. כמו כן, הכרנו את פעולות החזקה והשורש. הכרנו כמה סוגי מספרים: טבעיים, שלמים, רציונליים וממשיים. כללי הפעולות מאפשרים לחשב את הערך של כל ביטוי, המורכב ממספרים ומפעולות ביניהם, באופן מוגדר וחד-משמעי. דבר זה מאפיין את המתמטיקה, שהיא ממלכת הוודאות. הכרת הכללים ותרגולם מאפשרים רכישת ביטחון וידיעה מוצקה שחישבנו נכונה. תחושה זו תלווה אותנו גם בהמשך הדרך.

## שאלות להערכה עצמית

## שאלה 45

חשבו את ערך הביטויים הבאים:

א.  $3 - 6 - 7$

ב.  $\frac{2}{5} - \frac{1}{7} + 1\frac{3}{10}$

ג.  $\frac{\sqrt{2^{5-1}} + (0.5)^3}{\frac{2}{3} - \frac{7}{4}}$

ד.  $((0.1 - 9) \cdot 8 - 3) \cdot (-7)$

ה.  $(1 - (1 - 2))^2 - 1 + (-3) \cdot 2$

ו.  $\frac{2}{3} : \frac{2}{5} : \frac{1}{4} - 1.5^2$

ז.  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$

ח.  $(1.1)^2 + (0.3)^{-2}$

ט.  $-(-3 - (-5)) - (-1)^5$

י.  $\frac{0.001}{0.0003}$

התשובה בעמוד 190

## שאלה 46

א. כמה הם 7.5% מתוך  $\frac{2}{5}$  ?

ב. כמה הם 205% מתוך 120 ?

ג. כמה אחוזים הם 12 מתוך 13 ?

ד. מחיר הדלק הוא 6.13 שקלים לליטר, ובחצות יתייקר בחמישה אחוזים. מה יהיה המחיר החדש?

התשובה בעמוד 191



## שיעור 2

# זהויות אלגבריות

בשיעור זה נלמד את אחד היסודות החשובים ביותר של הטכניקה המתמטית: אלגברה בסיסית. ביסודה של האלגברה עומדת ההבחנה שניתן לייצג משתנים מספריים על ידי אותיות, ולהתייחס למשתנים אלה כאל מספרים המצייתים לחוקי האריתמטיקה.

הבחנה פשוטה זו, שנלמד ביתר עיון בעמודים הבאים, פותחת מרחב אפשרויות עצום לפיתוח המתמטיקה וליישומה לפתרון בעיות מכל תחומי החיים.

ניסוח אלגברי של טענות מתמטיות מקנה יכולת ביטוי מדויקת ויעילה, הרבה יותר מזו שהיתה לנו בשיעור הקודם. לדוגמה, את חוק החילוף בחיבור ניסחנו כך: "החלפת סדר המחברים אינה משנה את הסכום". בלשון אלגברית נוכל לנסח את החוק בפשטות כך:

$$a + b = b + a$$

כדוגמה נוספת, בשיעור הקודם הכרנו את החוק "חיסור מספר שקול לחיבור המספר הנגדי". ניסוח זה רחוק מלהיות אידיאלי, ורק באמצעות דוגמאות היה ניתן להבין אותו לאשורו. בשפה אלגברית חוק זה מנוסח בפשטות כך:

$$a - b = a + (-b)$$

נתחיל את השיעור בהיכרות עם תבניות מספר, ולאחר מכן נכיר את הכללים הבסיסיים של האלגברה. בעזרת כללים אלה נראה איך ניתן להוכיח זהויות אלגבריות שונות, וביניהן כללי הכפל המקוצר, השימושיים בחישובים.

### תבניות מספר

תבנית מספר היא ביטוי המערב משתנים, מספרים ופעולות. המשתנים מיוצגים על ידי אותיות (בדרך כלל מהאלפבית הלטיני). הצבה של ערכים מספריים במשתנים נותנת ביטוי אריתמטי שניתן לחשבו ולקבל ערך מספרי.

נתבונן בכמה דוגמאות:

$$a + b$$

א. הביטוי:

הוא תבנית מספר שבו מופיעים המשתנים  $a$  ו- $b$ .

$$2 + 3 = 5$$

אם נציב, למשל,  $a = 2$  ו- $b = 3$ , תקבל התבנית את הערך

$$1 + (-1) = 0$$

אם נציב  $a = 1$  ו- $b = -1$  תקבל התבנית את הערך

$$\frac{1}{x-2}$$

ב. נתבונן בתבנית הבאה:

נוכל להציב בתבנית זו את הערך  $x = 1/2$ . נקבל:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{4}{2}} = \frac{1}{\frac{-3}{2}} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

אך לא נוכל להציב  $x = 2$ , שכן הצבה זו תניב את הביטוי

$$\frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$$

וערכו של ביטוי זה אינו מוגדר.

נאמר, אפוא, שהתבנית  $1/(x-2)$  אינה מוגדרת עבור הערך  $x = 2$ .

$$x^2 + 2 \cdot x$$

ג. נתבונן בתבנית

בתבנית זו המשתנה  $x$  מופיע פעמיים.

כל הופעה של משתנה בתבנית נקראת **מופע**.

$$6^2 + 2 \cdot 6 = 48$$

אם נציב בתבנית זו  $x = 6$ , יתקבל הערך

$$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 1 + (-2) = -1$$

אם נציב  $x = -1$ , נקבל

שימו לב לכך שכאשר הצבנו ערך של  $x$  בתבנית, ערך זה היה זהה בכל המופעים של המשתנה  $x$ . כלל זה נכון תמיד: משתנה המופיע בתבנית מספר, מקבל את אותו ערך בכל המופעים שלו.

תבנית מספר נקראת **ביטוי אלגברי** אם הפעולות שבה לקוחות מבין ארבע פעולות החשבון היסודיות: חיבור, חיסור, כפל וחילוק. כל הדוגמאות שראינו לעיל הן של ביטויים אלגבריים.

בכתיבת תבניות מספר מותר ומקובל להשמיט את סימן הכפל ( $\cdot$  או  $\times$ ), כאשר הכפל אינו בין שני מספרים. לדוגמה:

- במקום  $x \cdot y$  ניתן לכתוב  $xy$
- במקום  $2 \cdot x$  ניתן לכתוב  $2x$
- במקום  $5 \cdot (x + y)$  ניתן לכתוב  $5(x + y)$
- במקום  $(x + 1) \cdot (x + 2)$  ניתן לכתוב  $(x + 1)(x + 2)$

אך שימו לב: במקום  $2 \cdot 2$  לא ניתן לכתוב 22, שהרי סימון זה מציין את המספר עשרים ושתיים.

בדרך כלל נימנע מהשמטת סימן הכפל כאשר הגורם הימני הוא מספר. לדוגמה, את המכפלה  $x \cdot 2$  לא נכתוב בצורה  $x2$ , אלא נשאירה כפי שהיא.

## שאלה 1

הציבו את הערכים הבאים בתבניות המספר הנתונות.  
עבור כל הצבה חשבו את ערך התבנית או ציינו "לא מוגדר".

א. בתבנית  $x - 3y$  :

$$x = 1, y = 1 \quad (\text{i})$$

$$x = 0, y = -1 \quad (\text{ii})$$

$$x = 3, y = 1/2 \quad (\text{iii})$$

ב. בתבנית  $x^5 - 8x^2 - 3$  :

$$x = 2 \quad (\text{i})$$

$$x = -2 \quad (\text{ii})$$

$$x = 0 \quad (\text{iii})$$

ג. בתבנית  $\left(x + \frac{1}{y}\right)z$  :

$$x = 1/2, y = 2/3, z = 1/2 \quad (\text{i})$$

$$x = 1, y = 0, z = 1 \quad (\text{ii})$$

ד. בתבנית  $x\sqrt{y-x}$  :

$$x = 1, y = 10 \quad (\text{i})$$

$$x = 0, y = -1 \quad (\text{ii})$$

התשובה בעמוד 193

## נוסחאות

**נוסחה** היא תיאור של גודל מסוים כתבנית מספר בגדלים אחרים, באופן המבטא חוקיות שימושית. נוסחאות נמצאות בתחומים רבים של החיים, ובמיוחד בתחומי המדע והמתמטיקה עצמה. נתבונן בכמה דוגמאות:

א. ישנם כמה סולמות מדידה לטמפרטורה, ושניים מהנפוצים שבהם הם צלזיוס (המסומן  $^{\circ}C$ ) ופרנהייט (המסומן  $^{\circ}F$ ).

הנוסחה הבאה מקשרת בין שני סולמות המדידה:

$$F = C \cdot \frac{9}{5} + 32$$

בנוסחה זו  $F$  מייצג את הטמפרטורה במעלות פרנהייט, ו- $C$  מייצג את הטמפרטורה במעלות צלזיוס.

לדוגמה: ביום אביבי מסוים, הטמפרטורה בחוץ היא  $20^{\circ}C$ , ואנו רוצים לבטא את הטמפרטורה בסולם פרנהייט. לשם כך נציב  $C = 20$  בנוסחת ההמרה, ונקבל:

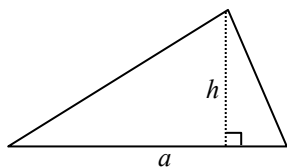
$$F = 20 \cdot \frac{9}{5} + 32 = \frac{180}{5} + 32 = 68$$

הטמפרטורה היא אפוא 68 מעלות פרנהייט, כלומר  $68^{\circ}F$ .

בשיעור הבא נלמד כיצד ניתן להשתמש בנוסחה זו כדי להמיר בכיוון ההפוך – מפרנהייט לצלזיוס.



ב. בגיאומטריה ידועה נוסחת השטח של משולש:

$$S = \frac{1}{2}ah$$


בנוסחה זו,  $a$  הוא אורכה של אחת הצלעות במשולש, ו- $h$  הוא אורך הגובה היורד מהקודקוד שמול צלע זו אל הצלע (ראו באיור משמאל).  
**הערה:** מושגים אלה יוסברו בפירוט בשיעור 8.

ג. נניח שברצוננו לחשב את הסכום הבא:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

הסכום שבו אנו מעוניינים הוא סכום כל המספרים השלמים שבין 1 ל-100. חישוב זה ידרוש מאתנו עבודה רבה. אך אין צורך לעבוד קשה: הנוסחה הבאה מאפשרת לחשב באופן מהיר את סכום כל המספרים השלמים בין 1 למספר  $n$  כלשהו –

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

בשיעור 5 נלמד איך להוכיח נוסחה זו, אך כבר בשלב זה נוכל להשתמש בה.  
נציב בנוסחה  $n = 100$  ונקבל:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot (100 + 1)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

## שאלה 2

א. חשבו את סכום המספרים  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$   
בשתי דרכים: פעם אחת באופן ישיר, ופעם שנייה בעזרת נוסחת הסכום שמופיעה למעלה; ודאו שמתקבלת תוצאה זהה.

ב. חשבו את הסכום  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 50$

ג. התוכלו לחשב את הסכום הבא:  $101 + 102 + 103 + \dots + 200$

התשובה בעמוד 193

## שאלה 3

כתבו את הטמפרטורות הבאות בסולם פרנהייט:

א.  $7^{\circ}\text{C}$       ב.  $0^{\circ}\text{C}$       ג.  $100^{\circ}\text{C}$

התשובה בעמוד 194

## זהויות אלגבריות

**זהות מתמטית** (או בקצרה, **זהות**) היא שוויון בין שתי תבניות מספר, המתקיים עבור כל ההצבות החוקיות של המשתנים.

אם כל הפעולות המשתתפות בזהות שייכות לארבע פעולות החשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק), הזהות נקראת **זהות אלגברית**.

לדוגמה, השוויון  $a - a = 0$

מתקיים עבור כל ערך של  $a$ , ולכן שוויון זה הוא זהות אלגברית.

גם השוויון  $a + b = b + a$

מתקיים עבור כל הצבה של ערכים עבור  $a$  ו- $b$ , ולכן הוא זהות אלגברית. כאמור בהקדמה, שוויון זה מבטא את חוק החילוף בחיבור.

הנה דוגמה לזהות פחות ברורה מאלה:  $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

נבחן את נכונותה של הזהות על ידי הצבת ערכים של  $x$ :

אם נציב  $x = 3$ , באגף השמאלי נקבל  $(3 + 2) \cdot (3 - 1) = 5 \cdot 2 = 10$

ובאגף הימני נקבל  $3^2 + 3 - 2 = 9 + 3 - 2 = 10$

אם נציב  $x = 5$ , באגף השמאלי נקבל  $(5 + 2) \cdot (5 - 1) = 7 \cdot 4 = 28$

ובאגף הימני נקבל  $5^2 + 5 - 2 = 25 + 5 - 2 = 28$

#### שאלה 4

בדקו את נכונותה של הזהות לעיל עבור הערכים הבאים:

א.  $x = 1$       ב.  $x = 1/2$       ג.  $x = -3$

התשובה בעמוד 194

ובכן, בדקנו ומצאנו שהשוויון  $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$  מתקיים עבור מגוון רחב של ערכים של המשתנה  $x$ . האם מכך נוכל להסיק שהשוויון מתקיים תמיד – כלומר, שמדובר בזהות אלגברית? או אולי היה הדבר יד המקרה?

כדי שנוכל להיות בטוחים שהשוויון מתקיים תמיד, עלינו להוכיח זאת. בשיעור זה נלמד דרכים להוכחת זהויות אלגבריות.

הכלים שיעמדו לרשותנו כדי להוכיח זהויות אלגבריות הם מספר מצומצם של חוקים בסיסיים (דוגמת חוק החילוף בחיבור,  $a + b = b + a$ ), וכללי היסק שיאפשרו לנו לקבל זהויות חדשות מזהויות ידועות.

כלל ההיסק השימושי והנפוץ ביותר הוא כלל ההצבה:

**בזהות נתונה, ניתן להציב ביטויים אלגבריים עבור המשתנים, ולקבל זהות חדשה.**

לדוגמה, בזהות  $a + b = b + a$

אם נציב  $a = x + 1$  ו-  $b = 2y$ , נקבל מיידית את הזהות

$$(x + 1) + 2y = 2y + (x + 1)$$

נכונותה של זהות זו נובעת מנכונותה של הזהות המקורית, כי הצבת ערכים כלשהם עבור  $x$  ו-  $y$  תגרור הצבה של ערכים עבור המשתנים  $a$  ו-  $b$ , ולפי הזהות המקורית, יתקבל שוויון:

$$\frac{(x + 1)}{a} + \frac{2y}{b} = \frac{2y}{b} + \frac{(x + 1)}{a}$$

מובן אפוא שכלל ההצבה פותח בפנינו אפשרויות רבות לקבלת זהויות חדשות מזהויות קיימות: אנו חופשיים להציב במשתנים המופיעים בזהות הידועה לנו כל ביטוי אלגברי שנבחר. החופש להציב כולל את האפשרות להציב ביטויים שבהם מופיעים משתנים מהזהות המקורית.

לדוגמה, בזהות  $ab = ba$

נוכל להציב במקום  $a$  את  $a + 1$ , ובמקום  $b$  את  $a + 2$ . נקבל זהות חדשה:

$$(a + 1)(a + 2) = (a + 2)(a + 1)$$

במקרה זה, נסמן את ההצבה כך:  $a \rightarrow a + 1, b \rightarrow a + 2$

בחרנו להשתמש בסימן החץ, ולא בסימן השוויון, כדי להדגיש את העובדה שלמשתנים  $a, b$  יש משמעות שונה בזהות החדשה מאשר זו שבזהות המקורית.

## שאלה 5

הציבו את הביטויים הבאים בזהויות הנתונות:

א. בזהות  $ab = ba$ :

$$a = x, b = x^2 - 1 \quad (i)$$

$$a \rightarrow 1 - a, b \rightarrow 2 - b \quad (ii)$$

$$a \rightarrow b, b \rightarrow a \quad (iii)$$

$$b = 5 \quad (iv)$$

ב. בזהות  $a - a = 0$ :

$$a \rightarrow a^2 \quad (i)$$

$$a = b + 1 \quad (ii)$$

$$a \rightarrow ab \quad (iii)$$

כלל היסק שימושי נוסף הוא כלל ההחלפה:

**ביטויים שווים הם ברי-החלפה בתוך כל ביטוי או זהות.**

לדוגמה, אם נתבונן בביטוי  $(a + b)^2 - 1$

נוכל להחליף את הביטוי  $a + b$ , המופיע בביטוי הגדול, בביטוי  $b + a$ , השווה לו לפי הזהות הידועה

$$a + b = b + a$$

מתקבלת הזהות:  $(a + b)^2 - 1 = (b + a)^2 - 1$

מכלל ההחלפה נובע, בפרט, שניתן לבצע פעולות חשבון בין זהויות: לחבר שתי זהויות, לחסר, לכפול, לחלק, ואף להעלות בחזקה.

לדוגמה, משתי הזהויות שכבר הכרנו

$$(1) \quad ab = ba$$

$$(2) \quad a + b = b + a$$

נובעות הזהויות:

$$ab + (a + b) = ba + (b + a) \quad ((1) \text{ ו-}(2))$$

$$ab(a + b) = ba(b + a) \quad ((1) \text{ ו-}(2))$$

$$(ab)^2 = (ba)^2 \quad ((1) \text{ בריבוע})$$

ניתן גם לכפול את שני אגפיה של זהות באותו הביטוי או המספר. לדוגמה:

$$a(a + b) = a(b + a) \quad (\text{הזהות } (2) \text{ מוכפלת ב-} a)$$

$$5(a + b) = 5(b + a) \quad (\text{הזהות } (2) \text{ מוכפלת ב-} 5)$$

כעת נכיר את חוקי האלגברה היסודיים, ומהם נפתח זהויות חדשות.

## חוקי החילוף והקיבוץ

הנה הניסוח הפורמלי של חוקי החילוף והקיבוץ בחיבור ובכפל:

**חוק החילוף בחיבור:**

$$a + b = b + a \quad \text{לכל } a, b \text{ ממשיים מתקיים}$$

**חוק החילוף בכפל:**

$$ab = ba \quad \text{לכל } a, b \text{ ממשיים מתקיים}$$

**חוק הקיבוץ בחיבור:**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{לכל } a, b, c \text{ ממשיים מתקיים}$$

**חוק הקיבוץ בכפל:**

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{לכל } a, b, c \text{ ממשיים מתקיים}$$

חוקים אלה מוכרים לנו מהשיעור הקודם, וכעת לבשו צורה חדשה.

נזכיר, שסדר הפעולות בחיבור ובכפל של יותר משני איברים הוא משמאל לימין; אך על סמך חוק הקיבוץ, ניתן לבצע את הפעולות בכל סדר שנבחר.

$$a + b + c = (a + b) + c \quad \text{לדוגמה:}$$

כלומר, לפי ההגדרה, כדי לחשב את הסכום  $a + b + c$  יש לחשב תחילה את הסכום  $a + b$  ולתוצאה להוסיף את  $c$ .

אך לפי חוק הקיבוץ, סכום זה שווה גם ל- $a + (b + c)$  ולכן ניתן באותה מידה, לחשב תחילה את הסכום  $b + c$  ולחבר את התוצאה ל- $a$ .

$$a + b + c + d = ((a + b) + c) + d \quad \text{בדומה, בסכום המרובע}$$

סדר הפעולות הוא משמאל לימין; אך ניתן לבצע את הפעולות גם בכל סדר אחר. לדוגמה, לפי חוק הקיבוץ:

$$\begin{aligned} ((a + b) + c) + d &= (a + (b + c)) + d = a + ((b + c) + d) \\ &= a + (b + (c + d)) = (a + b) + (c + d) \end{aligned}$$

גם סדר הופעת המחברים אינו משפיע על התוצאה. למשל, את הסכום  $a + b + c$  אפשר לכתוב מחדש כ- $c + b + a$  כי לפי חוקי החילוף והקיבוץ:

$$\begin{aligned} a + b + c &= (a + b) + c = (b + a) + c = b + (a + c) = b + (c + a) \\ &= (b + c) + a = (c + b) + a = c + b + a \end{aligned}$$

נוכל לסכם ולאמר כי כמו בחישובים מספריים, גם בביטויים אלגבריים, חישוב סכום או מכפלה של מספר כלשהו של איברים אינו תלוי בסדר ביצוע הפעולות או בסדר ההופעה של איברים אלה.

## חוק הפילוג

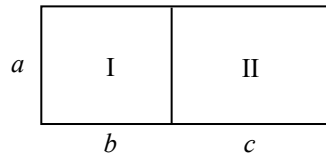
החוק הבא מקשר בין פעולת החיבור ופעולת הכפל.

### חוק הפילוג:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{לכל } a, b, c \text{ ממשיים מתקיים}$$

מקור השם "פילוג" הוא בכך שפעולת הכפל באגף השמאלי מתפלגת לשתי פעולות כפל באגף הימני. בשל כך נאמר כי פעולת הכפל מתפלגת מעל לפעולת החיבור.

ניתן לייחס משמעות גיאומטרית לחוק הפילוג במקרה שבו המספרים  $a, b, c$  הם חיוביים. נתבונן במלבן שאורכי צלעותיו הם  $a$  ו- $b + c$ . נפרק מלבן זה לשני מלבנים כמפורט באיור:



שטחו של כל מלבן שווה למכפלת אורכי צלעותיו (נלמד על כך יותר בשיעור 8).  
שטחו של המלבן I הוא  $ab$ ; שטחו של המלבן II הוא  $ac$ .

שטחו של המלבן הגדול הוא  $a(b+c)$ , ושטח זה שווה לסכום שטחי שני המלבנים הקטנים:

$$a(b+c) = ab + ac$$

הזהות הבאה היא גרסה נוספת של חוק הפילוג:  
 $(a+b)c = ac + bc$   
לפעמים קוראים לזהות זו "חוק הפילוג מימין", ולחוק הפילוג "חוק הפילוג משמאל".  
זהות זו אינה חוק חדש, אלא נובעת מחוק הפילוג ומחוק החילוף. הנה הוכחתה:

$$(a+b)c = c(a+b) \quad (\text{לפי חוק החילוף בכפל})$$

$$= ca + cb \quad (\text{לפי חוק הפילוג})$$

$$= ac + bc \quad (\text{לפי חוק החילוף בכפל})$$

פישוט = הבאה לצורה פשוטה יותר.

חוק הפילוג שימושי מאוד בפעולת הפישוט של ביטויים אלגבריים. במסגרת הפישוט, חוק הפילוג (מימין ומשמאל) מאפשר לפתוח סוגריים, כפי שנראה בדוגמאות הבאות:

$$2(x+1) = 2 \cdot x + 2 \cdot 1 = 2x + 2 \quad \text{נפשט את הביטוי } 2(x+1):$$

$$x(2x+3) = x \cdot 2x + x \cdot 3 = 2 \cdot x \cdot x + 3 \cdot x \quad \text{נפשט את הביטוי } x(2x+3):$$

$$= 2x^2 + 3x$$

$$(x+3)y = xy + 3y \quad \text{נפשט את הביטוי } (x+3)y:$$

## שאלה 6

פתחו סוגריים בביטויים הבאים:

א.  $3(x+5)$       ב.  $(y+2) \cdot 3$       ג.  $5(2x+1)$

ד.  $x(x+y)$       ה.  $a(2a+3)$

כדי לפשט מכפלה של שני סכומים נפעיל כמה פעמים את חוק הפילוג, מימין ומשמאל. לדוגמה, נפשט את הביטוי  $(x + 2)(x + 3)$ :

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= (x + 2)x + (x + 2) \cdot 3 \\&= (x \cdot x + 2x) + (x \cdot 3 + 2 \cdot 3) \\&= x^2 + 2x + 3x + 6 \\&= x^2 + (2 + 3)x + 6 \\&= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

שימו לב שבמהלך פעולת הפישוט איחדנו את שני המחוברים  $2x$  ו-  $3x$  לכדי מחובר אחד,  $5x$ , לפי חוק הפילוג:

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$$

לפעולה זו קוראים **כינוס איברים דומים**.

באופן כללי, ניתן לכפול שני סכומים  $a + b$  ו-  $c + d$  לפי הזהות הבאה:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

הנה הוכחת הזהות:

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= a(c + d) + b(c + d) && \text{(לפי חוק הפילוג מימין)} \\&= ac + ad + bc + bd && \text{(לפי חוק הפילוג משמאל)}\end{aligned}$$

בקרב דוברי אנגלית מקובל לזכור זהות זו לפי ראשי התיבות FOIL, שמשמעותם: First, Outer, Inner, Last

כלומר, המחוברים באגף ימין הם:

מכפלת המחוברים **הראשונים** ( $ac$ ), מכפלת המחוברים **החיצוניים** ( $ad$ ),

מכפלת המחוברים **הפנימיים** ( $bc$ ), מכפלת המחוברים **האחרונים** ( $bd$ ).

## שאלה 7

פתחו סוגריים בביטויים הבאים:

$$\text{א. } (a + 1)(a + 4) \quad \text{ב. } (x + y)(2x + 3y) \quad \text{ג. } (2x + 5)(3x + 6)$$

התשובה בעמוד 195

הזהויות הבאות מדגימות פתיחת סוגריים בסוגים נוספים של מכפלות סכומים:

- (1)  $a(b + c + d) = ab + ac + ad$
- (2)  $(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$
- (3)  $(a + b + c)(d + e + f) = ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$

נוכל לסכם את כל זהויות פתיחת הסוגריים שראינו באופן הבא:

**מכפלה של שני סכומים שווה לסכום כל המכפלות של זוגות מחוברים, האחד מהסכום הראשון והשני מהסכום השני.**

לדוגמה, במכפלה  $(a + b + c)(d + e)$ , המחברים באגף ימין של הזהות (2) הם כל המכפלות של מחובר אחד מבין  $a, b, c$  ומחובר אחד מבין  $d, e$ .

ניתן ליצור את כל המכפלות האלה לפי הטבלה הבאה:

| $\cdot$ | $d$  | $e$  |
|---------|------|------|
| $a$     | $ad$ | $ae$ |
| $b$     | $bd$ | $be$ |
| $c$     | $cd$ | $ce$ |

המכפלה  $(a + b + c)(d + e)$  שווה לסכום כל המכפלות שבטבלה:  
 $(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$

הנה כמה דוגמאות לפתיחת סוגריים במכפלות מסוגים אלה:

א. נפתח סוגריים בביטוי  $(2x + 3y + 1)(x + 1)$ :

ניצור את טבלת המכפלות –

| $\cdot$ | $x$    | $1$  |
|---------|--------|------|
| $2x$    | $2x^2$ | $2x$ |
| $3y$    | $3xy$  | $3y$ |
| $1$     | $x$    | $1$  |

$$\begin{aligned} (2x + 3y + 1)(x + 1) &= 2x^2 + 2x + 3xy + 3y + x + 1 \\ &= 2x^2 + 3xy + 3x + 3y + 1 \end{aligned}$$

נקבל:

שימו לב שכינסנו איברים דומים:  $2x + x = 3x$

ב. נפתח סוגריים בביטוי  $(x^2 + 2x + 1)(3x^2 + x + 2)$ :  
 נכתוב הפעם ישירות –

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 1)(3x^2 + x + 2) &= \\ x^2 \cdot 3x^2 + x^2 \cdot x + x^2 \cdot 2 + \\ 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot x + 2x \cdot 2 + \\ 1 \cdot 3x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 &= \\ 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x^3 + 2x^2 + 4x + 3x^2 + 1 \cdot x + 2 &= \\ 3x^4 + (1 + 6)x^3 + (2 + 2 + 3)x^2 + (4 + 1)x + 2 &= \\ 3x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$



קיבלנו אפוא:

$$(x^2 + 2x + 1)(3x^2 + x + 2) = 3x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 5x + 2$$

כדי לבדוק שלא השתרבבה טעות לחישוב, נוכל להציב ערך כלשהו של המשתנה  $x$  ולוודא שמתקיים שוויון.

$$(2^2 + 2 \cdot 2 + 1)(3 \cdot 2^2 + 2 + 2) = 9 \cdot 16 = 144 \quad \text{נציב למשל } x = 2 :$$

$$3 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 = 48 + 56 + 28 + 10 + 2 = 144$$

## שאלה 8

פתחו סוגריים בביטויים הבאים, ובדקו את תוצאתכם על ידי הצבה:

א.  $(a + b + 2)(a + 2)$  (הציבו:  $a = 2, b = 3$ )

ב.  $(ab + c)(ac + b + c)$  (הציבו:  $a = 1, b = 2, c = 3$ )

ג.  $(t^2 + 2)(t + 3)$  (הציבו:  $t = 3$ )

ד.  $(2x^2 + 3x + 2)(5x^2 + x + 3)$  (הציבו:  $x = 1$ )

התשובה בעמוד 195

## שאלה 9

הוכיחו את הזהויות (1), (2), (3) שבעמוד 68.

התשובה בעמוד 196

## שאלה 10

א. פתחו את הסוגריים בביטוי:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

רמז: הכפילו תחילה שניים מהגורמים במכפלה, ולאחר מכן הכפילו את התוצאה

שקיבלתם עם הגורם השלישי.

ב. פתחו את הסוגריים בביטוי:

$$(a + b)(c + d)(e + f)$$

התשובה בעמוד 197

## חוקי האיברים הניטרליים

נמשיך בהצגת החוקים היסודיים של האלגברה, ונציג את החוקים הנוגעים למספרים 0 ו-1.

**חוק האיבר הניטרלי בחיבור:**

$$a + 0 = a$$

לכל  $a$  ממשי מתקיים

משמעות חוק זה הוא שהמספר 0 ניטרלי (אדיש) לפעולת החיבור: חיבור 0 למספר לא משנה את ערכו.

**חוק האיבר הניטרלי בכפל:**

$$a \cdot 1 = a$$

לכל  $a$  ממשי מתקיים

משמעות חוק זה היא שהמספר 1 ניטרלי לפעולת הכפל: הכפלת מספר ב-1 לא משנה את ערכו.

**חוק הכפל באפס:**

$$a \cdot 0 = 0$$

לכל  $a$  ממשי מתקיים**חוקי החיסור והאיבר הנגדי**

לכל מספר ממשי  $a$  מוגדר מספר נגדי, המייצג את בואתו הסימטרית של  $a$  ביחס לראשית על ציר המספרים. מספר זה מסומן על ידי  $-a$ .

התכונות הבאות הן תכונות יסודיות:

**חוק האיבר הנגדי:**

$$a + (-a) = 0$$

לכל  $a$  ממשי מתקיים**חוק החיסור והנגדי:**

$$a - b = a + (-b)$$

לכל  $a, b$  ממשיים מתקיים

בשיעור הקודם ניסחנו כלל זה כך: "חיסור שקול לחיבור הנגדי".

**חוק הכפל ב-1:**

$$-a = (-1) \cdot a$$

לכל  $a$  ממשי מתקיים

שני החוקים האחרונים שימושיים במיוחד בפישוט ביטויים ופתיחת סוגריים. חוק החיסור והנגדי מאפשר להמיר כל פעולת חיסור בפעולת חיבור, וחוק הכפל ב-1 מאפשר להמיר כל פעולה של לקיחת הנגדי בפעולת כפל. כך מתאפשר שימוש בחוקים וזהויות שכבר הכרנו.

נדגים את השימוש בחוקים אלה, ובתוך כך נפתח זהויות חשובות נוספות:

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

א. הזהות

בשיעור הקודם ניסחנו זהות זו כך: הנגדי לסכום שווה לסכום הנגדיים.

נוכיח את הזהות:

$$-(a + b) = (-1) \cdot (a + b)$$

(לפי חוק הכפל ב-1)

$$= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b$$

(לפי חוק הפילוג)

$$= (-a) + (-b)$$

(לפי חוק הכפל ב-1)

$$-(-a) = a$$

ב. הזהות

שניסוחה במילים הוא: הנגדי לנגדי שווה למספר המקורי.

$$-(-a) = (-1) \cdot (-a) = (-1) \cdot (-1) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

הנה הוכחתה:

$$-(a - b) = b - a$$

ג. הזהות

בשיעור הקודם ניסחנו זהות זו כך: החלפת סדר המחסר והמחוסר מביאה לתוצאה נגדית לתוצאה המקורית.

נוכיח את הזהות:

$$\begin{aligned}
 -(a - b) &= (-1) \cdot (a - b) && \text{(לפי חוק הכפל ב' -1)} \\
 &= (-1) \cdot (a + (-b)) && \text{(לפי חוק החיסור והנגדי)} \\
 &= (-1) \cdot a + (-1) \cdot (-b) && \text{(לפי חוק הפילוג)} \\
 &= -a + (-(-b)) && \text{(לפי חוק הכפל ב' -1)} \\
 &= -a + b && \text{(לפי הזהות שהוכחנו בסעיף ב)} \\
 &= b + (-a) && \text{(לפי חוק החילוף בחיבור)} \\
 &= b - a && \text{(לפי חוק החיסור והנגדי)}
 \end{aligned}$$

$$(-a) \cdot b = -ab \quad \text{ד. הזהויות:}$$

$$a \cdot (-b) = -ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

באופן בלתי פורמלי אפשר לאמר ששני סימני מינוס ( - ) מבטלים זה את זה בפעולת הכפל; וסימן מינוס יחיד שומר על מקומו במכפלה.

$$(-a) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b = -ab \quad \text{הנה הוכחת הזהויות:}$$

$$a \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot ab = -ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = (-1)a(-1)b = (-1)(-1)ab = ab$$

$$a(b - c) = ab - ac \quad \text{ה. הזהות}$$

מבטאת את פילוג פעולת הכפל מעל פעולת החיסור.

הנה הוכחתה:

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$$

במהלך ההוכחה נעזרנו בזהות  $a(-b) = -ab$  שראינו בסעיף הקודם.

$$1. \text{ נפתח סוגריים בביטוי } (-a + b - c)(d - e)$$

לצורך כך נציג כל אחד מהגורמים במכפלה כסכום -

$$-a + b - c = (-a) + b + (-c)$$

$$d - e = d + (-e)$$

כעת נפתח סוגריים בביטוי כמכפלת סכומים:

$$\begin{aligned}
 (-a + b - c)(d - e) &= ((-a) + b + (-c)) \cdot (d + (-e)) \\
 &= (-a)d + (-a)(-e) + bd + b(-e) \\
 &\quad + (-c)d + (-c)(-e) \\
 &= -ad + ae + bd - be - cd + ce
 \end{aligned}$$

בשלב האחרון נעזרנו בזהויות שבסעיף ד.

ז. נפתח סוגריים בביטוי  $-(-a - b + c)$ :

$$\begin{aligned} -(-a - b + c) &= -((-a) + (-b) + c) \\ &= (-1) \cdot ((-a) + (-b) + c) \\ &= (-1) \cdot (-a) + (-1) \cdot (-b) + (-1) \cdot c \\ &= -(-a) + -(-b) + (-c) \\ &= a + b + (-c) \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

קיבלנו את סכום המחברים שבסוגריים המקוריים, כאשר כל מחובר מופיע בסימן מנוגד לסימנו המקורי. כלל זה נכון תמיד בחישוב הנגדי של ביטויים מסוג זה.

ח. כעת נפשט את הביטוי הבא:  $(x + 2)(x - 1)$

לפי השיטה שהכרנו בסעיף ו,

$$\begin{aligned} (x + 2)(x - 1) &= (x + 2)(x + (-1)) \\ &= x \cdot x + x \cdot (-1) + 2x + 2 \cdot (-1) \\ &= x^2 - x + 2x - 2 \\ &= x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

שימו לב לכינוס האיברים הדומים שביצענו:

$$-x + 2x = 2x - x = (2 - 1)x = 1 \cdot x = x$$

כאן השתמשנו בפילוג הכפל מעל החיסור (לפי סעיף ה).

הוכחנו אפוא את הזהות:  $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

זהות זו הוצגה כדוגמה בתחילת השיעור (עמוד 63), ובדקנו את נכונותה עבור ערכים מסוימים של  $x$ . כעת עלה בידנו להוכיחה.

## שאלה 11

פתחו סוגריים בביטויים הבאים:

- |                          |                                 |
|--------------------------|---------------------------------|
| א. $(a + b)(c - d)$      | ז. $x(x + y)$                   |
| ב. $(a - b)(c - d)$      | ח. $(x + 3)(2x - 1)$            |
| ג. $(a + b - c)(-d + e)$ | ט. $(x - 2)(x^2 + 2x - 3)$      |
| ד. $-(a + b - c - d)$    | י. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$       |
| ה. $a - (b + c)$         | יא. $12x - (x + 2)(x + 3)$      |
| ו. $a - (b - c) + d$     | יב. $(2x + y)(3x - y)(-x + 2y)$ |

## פירוק לגורמים בעזרת חוק הפילוג

כפי שלמדנו, חוק הפילוג מאפשר לנו לפתוח סוגריים בביטויים שהם מכפלה של סכומים.

$$\begin{aligned} (x+1)(y+2) &= (x+1)y + (x+1) \cdot 2 && \text{לדוגמה:} \\ &= xy + 1 \cdot y + x \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &= xy + y + 2x + 2 \end{aligned}$$

יש מקרים שבהם נרצה לבצע את הפעולה ההפוכה: בהינתן ביטוי אלגברי המוצג כסכום, להציג את הביטוי כמכפלה של ביטויים פשוטים יותר. פעולה זו נקראת **פירוק לגורמים** של הביטוי הנתון.

פעולה זו אינה תמיד קלה. למשל, אם נתון הביטוי  $xy + y + 2x + 2$  שאליו הגענו בדוגמה הקודמת, ייתכן שנתקשה לנחש שניתן להציג אותו כמכפלה  $(x+1)(y+2)$ . אולם במקרים רבים פעולת הפירוק לגורמים היא אפשרית, ונכיר בשיעור זה ובשיעור הבא דרכים לבצעה.

הדרך שאותה נכיר כעת היא להשתמש בחוק הפילוג, כאשר נזהה גורם משותף במחברים שבביטוי.

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac && \text{נזכור את חוק פילוג הכפל מעל החיבור:} \\ a(b-c) &= ab-ac && \text{ואת חוק פילוג הכפל מעל החיסור:} \end{aligned}$$

לפי חוקים אלה, כאשר נזהה ביטוי מהצורה  $ab+ac$ , נוכל להציגו בצורה  $a(b+c)$ ; וכאשר נזהה ביטוי מהצורה  $ab-ac$  נוכל להציגו בצורה  $a(b-c)$ . לפעולה זו נקרא **הוצאה של  $a$  מחוץ לסוגריים**.

לדוגמה:

$$\begin{aligned} \text{א. נפרק לגורמים את הביטוי } xy+2x &: xy+2x = x \cdot y + x \cdot 2 = x(y+2) \\ \text{ב. נפרק לגורמים את הביטוי } x^2-x &: x^2-x = x \cdot x - x \cdot 1 = x(x-1) \\ \text{ג. נפרק לגורמים את הביטוי } 2x+3x &: 2x+3x = (2+3)x = 5x \end{aligned}$$

במקרה זה, הפעולה נקראת גם **כינוס איברים דומים** (בפעולה זו נתקלנו כבר קודם).

באופן דומה, נוכל להוציא ביטוי מחוץ לסוגריים בביטויים הכוללים יותר משני מחברים, על ידי שימוש בזהויות כמו הזהות הבאה:

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad$$

$$\text{לדוגמה: } a^2b+ab+2b = b \cdot a^2 + b \cdot a + b \cdot 2 = b(a^2+a+2)$$

בדוגמה זו הוצאנו את  $b$  מחוץ לסוגריים, כי הוא הגורם שמופיע בכל המחברים.

## שאלה 12

פרקו לגורמים את הביטויים הבאים:

$$\begin{aligned} \text{א. } x^2-2x & \quad \text{ב. } 5x-7x \\ \text{ג. } ab-b^2 & \quad \text{ד. } a^2b-ab^2 \\ \text{ה. } x^2+xy+2x & \quad \text{ו. } abc+b^2c+c^2b \\ \text{ז. } 2a^2-2a-ab & \quad \text{ח. } (a+3)b+a+3 \end{aligned}$$

**חוקי החילוק**

לסיום הצגת חוקי האלגברה היסודיים, נציג את החוקים הקשורים לחילוק. פעולת החילוק של מספר ממשי  $a$  במספר ממשי  $b$  מוגדרת רק כאשר  $b$  אינו אפס. נציין זאת כך:  $b \neq 0$ . תוצאת פעולת חילוק זו מסומנת כך:  $\frac{a}{b}$ , וניתן לסמנה גם  $a/b$  או  $a : b$ . אלה הם הכללים היסודיים של פעולת החילוק:

**חלוקת מספר ב־1:**

$$\frac{a}{1} = a \quad \text{לכל } a \text{ ממשי מתקיים}$$

**חלוקת מספר בעצמו:**

$$\frac{a}{a} = 1 \quad \text{לכל } a \neq 0 \text{ מתקיים}$$

**כפל שברים:**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{לכל } a, b, c, d \text{ ממשיים המקיימים } bd \neq 0, \text{ מתקיים}$$

**חילוק שברים:**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \text{לכל } a, b, c, d \text{ ממשיים המקיימים } bcd \neq 0, \text{ מתקיים}$$

**הערה:** התנאי  $bd \neq 0$  בחוק כפל השברים שקול לכך ש־ $b \neq 0$  וגם  $d \neq 0$ , כי אם אחד מהגורמים במכפלה שווה ל־0, המכפלה כולה שווה ל־0, ואם כל הגורמים במכפלה שונים מאפס אז המכפלה כולה שונה מאפס. באופן דומה, התנאי  $bcd \neq 0$  שקול לכך ששלושת המספרים  $b, c, d$  שונים מאפס. נוח לבטא את התנאי בעזרת המכפלה, מטעמי קיצור.

כעת נסיק חוקים נוספים מכללים אלה, ונדגים את השימוש בהם:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{א. הזהות}$$

זהות זו מאפשרת להמיר פעולת חילוק בפעולת כפל. הנה הוכחתה:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \text{ב. חוק ההרחבה:}$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \quad \text{הוכחה:}$$

$$\frac{a : c}{b : c} = \frac{a}{b} \quad \text{ג. חוק הצמצום:}$$

$$\frac{a : c}{b : c} = \frac{a \cdot \frac{1}{c}}{b \cdot \frac{1}{c}} = \frac{a}{b} \quad \text{הוכחה: לפי סעיפים א ו־ב,}$$

◁ בחוקים אלה אנו מניחים שכל הביטויים מוגדרים, כלומר שהמכנים שבשברים שונים מ־0.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{ד. חוק החיבור לשברים בעלי מכנה זהה:}$$

הוכחה: לפי סעיף א, וחוק הפילוג,

$$\frac{a+b}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

הערה: ניתן לראות חוק זה כחוק הפילוג של החילוק מעל החיבור.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad \text{ה. חוק החיסור לשברים בעלי מכנה זהה:}$$

$$\frac{a-b}{c} = (a-b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} - b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \quad \text{הוכחה:}$$

הערה: נוכל לכתוב ביחד את שני החוקים האחרונים, באופן הבא:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

ו. חיבור וחיסור שברים כלליים:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \quad \text{נניח שברצוננו לחשב את הסכום}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad \text{לצורך כך נרחיב את השבר } a/b \text{ במספר } d:$$

$$\frac{c}{d} = \frac{cb}{db} = \frac{bc}{bd} \quad \text{בנוסף, נרחיב את השבר } c/d \text{ במספר } b:$$

ביטאנו את שני המחוברים כשברים בעלי מכנה זהה. כלומר, מצאנו מכנה משותף. כעת ניתן לחבר לפי הזהות שבסעיף ד:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{קיבלנו אפוא את הזהות}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad \text{באופן דומה נוכל לקבל:}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \text{ניתן לבטא זאת בזהות אחת:}$$

### שאלה 13

הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc} \quad \text{א.} \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} \quad \text{ב.}$$

התשובה בעמוד 199

$$1 : (1 : a) = a \quad \text{ד.}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad \text{ה.}$$

## פעולות בשברים אלגבריים

לשברים, שבהם המונה והמכנה הם ביטויים אלגבריים, קוראים **שברים אלגבריים**.

$$\frac{a + b^2}{3a + 5}$$

לדוגמה, הביטוי הבא הוא שבר אלגברי:

החוקים שהכרנו בסעיף הקודם מאפשרים פישוט של שברים אלגבריים וקבלת זהויות אלגבריות חדשות.

תוכלו למצוא דמיון רב בין הפעולות המבוצעות על שברים אלגבריים, לבין הפעולות המבוצעות על שברים מספריים, שהכרנו בשיעור הקודם. דמיון זה אינו מקרי, שכן שבר מספרי הוא מקרה פרטי של שבר אלגברי: המונה והמכנה בשבר כזה הם מספרים שלמים קבועים. אי לכך, הניסיון שרכשנו בטיפול בשברים מספריים יסייע בידינו.

נבהיר את הדברים על ידי דוגמאות.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$$

א. נתבונן בביטוי

כדי לחבר את השברים, ניעזר בנוסחת חיבור השברים שלמדנו זה עתה:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

נציב בנוסחה את הנתונים הבאים:  $a = 1, b = x, c = 2, d = x + 1$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{1 \cdot (x+1) + x \cdot 2}{x(x+1)} = \frac{x+1+2x}{x^2+x} = \frac{3x+1}{x^2+x} \quad \text{נקבל -}$$

זכרו כי השוויון שקיבלנו הוא זהות, ולפיכך הצבה של כל ערך חוקי של  $x$  בשני האגפים תניב מספרים שווים. הכוונה בביטוי 'ערך חוקי' היא לערך שעבורו שני האגפים מוגדרים, כלומר – במקרה שלפנינו – ערך שעבורו לא תתקבל חלוקה באפס.



אם נציב, לדוגמה,  $x = 1/2$ , נקבל באגף שמאל

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} + \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{2}{1} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

ובאגף ימין:

$$\frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

ב. כעת נתבונן בביטוי:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$$

ניתן לחבר את השברים האלגבריים לפי נוסחת חיבור השברים, כמו בסעיף א, אך יש דרך פשוטה יותר, שאותה הכרנו בשיעור הקודם כשחיברנו שברים מספריים. בשיטה זו מוצאים מכנה משותף: ביטוי שמתחלק בכל אחד מהמכנים של המחוברים; מרחיבים כל שבר אל המכנה המשותף; ומחברים את השברים כשברים בעלי מכנה זהה. כוחה של שיטה זו יפה גם לשברים אלגבריים, כשהמספרים מוחלפים בביטויים אלגבריים.

במקרה שלפנינו, הביטוי  $(x+1)(x+2)(x+3)$  הוא מכנה משותף. כל אחד מהמכנים של המחוברים ניתן להשלמה למכנה המשותף על ידי כפל בביטוי פשוט:

$$(x+1)(x+2) \cdot (x+3) = (x+1)(x+2)(x+3)$$

$$(x+2)(x+3) \cdot (x+1) = (x+1)(x+2)(x+3)$$

נרחיב כל אחד מהמחוברים אל המכנה המשותף:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{x \cdot (x+3)}{(x+1)(x+2) \cdot (x+3)} = \frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{(x+1) \cdot (x+1)}{(x+2)(x+3) \cdot (x+1)} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

כעת נוכל לחבר את השברים, כשברים בעלי מכנה זהה:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x(x+3) + (x+1)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\triangleleft \text{לפי חוק ההרחבה: } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

נפשט את המונה ואת המכנה לפי חוק הפילוג:

$$\begin{aligned}x(x+3) + (x+1)^2 &= x^2 + 3x + (x+1)(x+1) \\&= x^2 + 3x + x^2 + 1 \cdot x + x \cdot 1 + 1 \\&= 2x^2 + 5x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3) &= (x^2 + 2x + x + 2)(x+3) \\&= (x^2 + 3x + 2)(x+3) \\&= x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6 \\&= x^3 + 6x^2 + 11x + 6\end{aligned}$$

לסיכום, קיבלנו:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

## שאלה 14

א. הציבו בזהות שהתקבלה את הערכים  $x = 1$  ו-  $x = 0$ , וודאו שמתקבל שוויון.

ב. נסו להציב  $x = -1$ . מה הבעיה שנוצרת? האם הדבר הוא בסתירה לזהות?

נמשיך בדוגמאות לביצוע פעולות בשברים אלגבריים:

ג. נפשט את הביטוי  $\frac{x+y}{2x+3} \cdot \frac{y+1}{x}$

לפי כלל כפל השברים:

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2x+3} \cdot \frac{y+1}{x} &= \frac{(x+y)(y+1)}{(2x+3)x} \\&= \frac{xy + x + y^2 + y}{2x \cdot x + 3x} = \frac{xy + y^2 + x + y}{2x^2 + 3x}\end{aligned}$$

ד. נפשט את הביטוי  $\frac{x^2 + 2x}{x(x+1)}$

◁ לפי חוק הפילוג

נשים לב שניתן לפרק לגורמים את המונה:

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

כעת נוכל לפשט:

$$\frac{x^2 + 2x}{x(x+1)} = \frac{x(x+2)}{x(x+1)} = \frac{x}{x} \cdot \frac{x+2}{x+1} = 1 \cdot \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$$

בפעולה שביצענו, צמצמנו את  $x$  במונה ובמכנה.

ניתן לייצג פעולה זו גם כך:

$$\frac{x^2 + 2x}{x(x+1)} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} + 2 \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$$

באופן כללי, ניתן לצמצם גורם המופיע בכל המחברים במונה ובמכנה. לדוגמה –

$$\frac{2xy + 5y}{y^2 + y} = \frac{2\cancel{y} + 5\cancel{y}}{y \cdot \cancel{y} + 1 \cdot \cancel{y}} = \frac{2x + 5}{y + 1}$$

$$\frac{y^2 + x}{xy + 5y}$$

לעומת זאת, בביטוי

לא ניתן לצמצם את  $y$  כי הוא אינו מופיע כגורם בכל המחוברים במונה.

כעת נסו אתם את כוחכם בפעולות בשברים אלגבריים:

### שאלה 15

פשטו את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}$       ב.  $\frac{x}{x^2+1} - \frac{y}{y^2+1}$

ג.  $\frac{2}{3} - \frac{4x}{5x+1}$       ד.  $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2}$

ה.  $\frac{2x}{3x-1} : \frac{4y}{x+y}$       ו.  $\frac{\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{x^2+2x}$

ז.  $\frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}}{\frac{3}{x} + \frac{4}{x+1}}$       ח.  $\frac{-1}{3-x} - \frac{-5}{5-x}$

ט.  $x \cdot \frac{y}{y+1} - y \cdot \frac{2x}{x-1}$       י.  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(1 - \frac{3}{x}\right)$

התשובה בעמוד 200

### שאלה 16

בכל אחד מהסעיפים בצעו את ההצבה ופשטו את הביטוי המתקבל.

א. בביטוי  $x + x^2$  הציבו  $x = \frac{1}{y}$

ב. בביטוי  $x + x^2$  הציבו  $x = y + \frac{1}{y}$

ג. בביטוי  $\frac{x}{x+1}$  הציבו  $x \rightarrow \frac{2+x}{2-x}$

ד. בביטוי  $\frac{x}{x+1}$  הציבו  $x \rightarrow \frac{x}{x+1}$

ה. בביטוי  $\frac{x+y}{2x+3y}$  הציבו  $x \rightarrow x-y, y \rightarrow y - \frac{1}{x}$

התשובה בעמוד 201

סיימנו ללמוד את הכללים היסודיים של ארבע פעולות החשבון הבסיסיות, וכעת יש בידינו את הכללים לפשט ביטויים אלגבריים ולהוכיח זהויות. כלים אלה הם הבסיס לפיתוחים המתמטיים שנכיר בהמשך הקורס, ולכן חשוב להכירם על בוריים ולתרגל את השימוש בהם.

## נוסחאות הכפל המקוצר

נכיר כעת כמה זהויות הידועות בשם 'נוסחאות הכפל המקוצר'. כפי ששמך של זהויות אלה מעיד, הן שימושיות בחישובים מספריים ומאפשרות לעתים לבצע פעולות חשבון מורכבות ללא הסתייעות במחשבון או כלי כתיבה.

נתחיל מהתבוננות בביטוי  $(a + b)^2$ . כזכור, העלאת מספר בריבוע משמעותה כפל המספר בעצמו, כלומר  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ . נפתח סוגריים במכפלה זו:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

באופן דומה, נקבל זהות עבור הביטוי  $(a - b)^2$ :

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = aa - ab - ba + bb = a^2 - 2ab + b^2$$

לבסוף, נתבונן בביטוי  $(a + b)(a - b)$ :

$$(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2$$

קיבלנו את שלוש הזהויות הבאות:

$$(1) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

נדגים את השימוש בזהויות אלה בחישובים:

א. כדי לחשב את  $21^2$  במהירות נציב  $b = 1$ ,  $a = 20$  בזהות (1) ונקבל:

$$21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$$

ב. כדי לחשב את  $19^2$  במהירות נציב  $b = 1$ ,  $a = 20$  בזהות (2):

$$19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$$

ג. כדי לחשב את המכפלה  $99 \times 101$  במהירות, נציב  $b = 1$ ,  $a = 100$  בזהות (3):

$$99 \times 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$$

## שאלה 17

חשבו בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר:

$$51^2 \quad \text{א.} \quad 10.5^2 \quad \text{ב.} \quad 18 \times 22 \quad \text{ג.}$$

$$96 \times 104 \quad \text{ד.} \quad 9.8^2 \quad \text{ה.} \quad 97^2 \quad \text{ו.}$$

התשובה בעמוד 202

בנוסף לעילותן בחישובים, נוסחאות הכפל המקוצר שימושיות בפישוט של ביטויים אלגבריים. בשאלה הבאה נראה כמה דוגמאות.

### שאלה 18

פשטו את הביטויים הבאים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר:

א.  $(x + 3)^2$

ב.  $(x - 3)^2$

ג.  $(2x - 1/2)^2$

ד.  $(2x + y)^2$

ה.  $(2x - 3y)^2$

ו.  $(x + y + 3)(x + y - 3)$

התשובה בעמוד 203

### שאלה 19

א. הוכיחו את הזהות:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

ב. מצאו והוכיחו זהות דומה עבור הביטוי  $(a + b + c + d)^2$

התשובה בעמוד 203

כעת נכיר זהויות נוספות, הנקראות 'נוסחאות כפל מקוצר ממעלה שלישית':

(4)  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(5)  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

### שאלה 20

א. הוכיחו את הזהויות (4), (5).

ב. מצאו זהויות דומות עבור הביטויים  $a^3 + b^3$ ,  $(a - b)^3$ .

רמז: הציבו בזהויות (4), (5)  $b \rightarrow -b$ .

התשובה בעמוד 203

### שאלה 21

א. פתחו סוגריים בביטוי  $(x + 2)^3$ .

ב. פתחו סוגריים בביטוי  $(2x - 3)^3$ .

התשובה בעמוד 204

## פירוק לגורמים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר

נוסחאות הכפל המקוצר שלמדנו עתה, שימושיות בפעולת הפירוק לגורמים.

א. הפרש של ריבועים

נוכל להיעזר בנוסחת הכפל המקוצר  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  (1)

כדי לפרק לגורמים את הביטוי  $a^2 - b^2$ , ובאופן כללי - כל ביטוי שהוא הפרש בין שני ריבועים.

לדוגמה, כדי לפרק לגורמים את הביטוי  $x^2 - 9$  נשים לב ש-  $9 = 3^2$ , ולכן ביטוי זה הוא הפרש בין שני ריבועים. לכן לפי הנוסחה (1):

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

הצבנו:  $a \rightarrow x, b \rightarrow 3$

באופן דומה, כדי לפרק לגורמים את הביטוי  $a^2 - 4b^2$  נוכל להציגו כך:

$$\begin{aligned} a^2 - 4b^2 &= a^2 - 2 \cdot 2 \cdot b \cdot b = a^2 - (2b) \cdot (2b) = a^2 - (2b)^2 \\ &= (a + 2b)(a - 2b) \end{aligned}$$

### ב. ריבוע של סכום ושל הפרש

ניעזר בנוסחאות הכפל המקוצר הבאות:

$$(2) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

כדי לפרק לגורמים ביטויים מהצורה  $a^2 + 2ab + b^2$  או  $a^2 - 2ab + b^2$ .

לדוגמה, כדי לפרק לגורמים את הביטוי  $x^2 + 4x + 4$ , נציג אותו כך:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$$

הצבנו:  $a \rightarrow x, b \rightarrow 2$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

נקבל אפוא, לפי הנוסחה (2):

באופן דומה, נפרק לגורמים את הביטוי  $x^2 - 2x + 1$  בעזרת הנוסחה (3):

הצבנו:  $a \rightarrow x, b \rightarrow 1$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2$$

### ג. הפרש של חזקות שלישיות

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

ניעזר בזהות

כדי לפרק לגורמים כל ביטוי שהוא הפרש בין חזקות שלישיות.

$$a^3 - 27 = a^3 - 3^3 = (a - 3)(a^2 + a \cdot 3 + 3^2)$$

לדוגמה:

$$= (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$$

### שאלה 22

פרקו לגורמים את הביטויים הבאים:

א.  $x^2 - 1$

ב.  $x^2 + 2x + 1$

ג.  $a^2b^2 - 2ab + 1$

ד.  $x^4 - x^2$

ה.  $x^3 - 1$

ו.  $x^3 + 1$

ז.  $(2a + 1)^2 - (3a - 1)^2$

ח.  $2x^2 + 4x + 2$

## חוקי החזקות

נעבור לדיון בפעולת החזקה ובתכונותיה האלגבריות.

נזכיר את הגדרתן של החזקות השלמות:

$$a^0 = 1 \quad \text{לכל } a \text{ ממשי,}$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ פעמים}} \quad \text{ובאופן כללי:}$$

בשוויון זה,  $n$  מייצג מספר טבעי כלשהו;  $a$  נקרא **בסיס החזקה** ו- $n$  נקרא **המעריך**.

החזקות השליליות הוגדרו כך:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{לכל } a \neq 0,$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{ובאופן כללי:}$$

המספר  $a^{-1}$  נקרא **ההופכי הכפלי** (או בקיצור, **ההופכי**) של  $a$ .

מתוך הכללים היסודיים של פעולת הכפל ניתן להוכיח זהויות שהן כללים יסודיים של פעולת החזקה. נכיר אותן דרך דוגמאות:

$$a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 \quad \text{אם נכפיל } a^2 \text{ עם } a^2 \text{ נקבל:}$$

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7 \quad \text{אם נכפיל } a^3 \text{ עם } a^4 \text{ נקבל:}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n} = a^{m+n} \quad \text{באופן כללי נקבל:}$$

בהזדהות זו  $m$  ו- $n$  מייצגים מספרים טבעיים כלשהם.

ניתן לוודא שזהות זו מתקיימת גם כש  $m$  ו- $n$  מקבלים ערכים שלמים כלשהם (כלומר ניתן לאפשר ערכים שליליים או 0 של המעריכים). כמובן, אם  $a$  מופיע עם מעריך שלילי, ההנחה המיידית היא ש- $a \neq 0$ ; אחרת, החזקה לא תהיה מוגדרת.

$$a^m a^n a^k = a^{m+n} a^k = a^{m+n+k} \quad \text{מנוסחה זו נקבל}$$

ובאופן כללי, כדי להכפיל מספר כלשהו של חזקות בעלות בסיס זהה, יש לחבר את המעריכים שלהן.

נתבונן כעת בריבוע המכפלה  $ab$ :

$$(ab)^2 = (ab) \cdot (ab) = abab = aabb = a^2 b^2$$

$$(ab)^3 = ababab = aaabbb = a^3 b^3 \quad \text{ובחזקה השלישית של } ab$$

באופן כללי נקבל:

$$\begin{aligned} (ab)^m &= \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_n \text{ פעמים } n = \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n = a^m b^m \end{aligned}$$

גם שוויון זה נכון לכל  $m$  שלם.

הכלל שקיבלנו,  $(ab)^m = a^m b^m$ , מראה שפעולת החזקה מתפלגת מעל לפעולת הכפל.

$$(abc)^m = (ab)^m c^m = a^m b^m c^m \quad \text{מכלל זה נקבל גם}$$

ובאופן כללי, חזקה של מכפלה שווה למכפלת החזקות של כל גורמי המכפלה (עם אותו המעריך).

לבסוף, נתבונן בדוגמאות של העלאת חזקה בחזקה:

$$(a^4)^2 = a^4 \cdot a^4 = a^{4+4} = a^8$$

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n \text{ פעמים } n = \underbrace{a^{m+m+\dots+m}}_n = a^{mn} \quad \text{באופן כללי:}$$

גם שוויון זה נכון לכל  $m, n$  שלמים.



קיבלנו שלוש זהויות שהן חוקי החזקות הבסיסיים:

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m a^n && \text{חוק חיבור המעריכים:} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{חוק פילוג החזקה מעל הכפל:} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{חוק החזקה של חזקה:} \end{aligned}$$

נדגים את השימוש בזהויות אלה, בפישוט של ביטויים אלגבריים ובחישובים מספריים:

א. כמה ספרות יש בהצגה העשרונית של המספר  $1000^5$ ?

כדי לענות על שאלה זו, ניזכר בחזקות של המספר 10:

$$\begin{aligned} 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \end{aligned}$$

המספר  $10^n$  מורכב מהספרה 1, שלימינה  $n$  מופעים של הספרה 0.

נכתוב נחשב, לפי חוקי החזקות:

$$1000^5 = (10^3)^5 = 10^{3 \cdot 5} = 10^{15}$$

הייצוג העשרוני של  $1000^5$  הוא, אפוא, 1 ולימינו חמישה עשר אפסים:

$$1000^5 = 1,000,000,000,000,000$$

לכן במספר  $1000^5$  יש 16 ספרות (כולל הספרה 1).

ב. נפשט את הביטוי  $(5x)^2$ :

$$(5x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25x^2 \quad (\text{לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל})$$

ג. נפשט את הביטוי  $(2xy^3)^4$ :

$$\begin{aligned} (2xy^3)^4 &= 2^4 x^4 (y^3)^4 && (\text{לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל}) \\ &= 16x^4 y^{12} && (\text{לפי חוק החזקה של חזקה}) \end{aligned}$$

ד. נפשט את המכפלה  $x^3(x^5 + 2x^7)$ :

$$\begin{aligned} x^3(x^5 + 2x^7) &= x^3 \cdot x^5 + 2x^3 \cdot x^7 && (\text{לפי חוקי האלגברה הרגילים} - \text{חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור, וחוק החילוף בכפל}) \\ &= x^8 + 2x^{10} && (\text{לפי חוק חיבור המעריכים}) \end{aligned}$$

ה. נפרק לגורמים את הביטוי  $x^{10} + x^7 + 3x^4$ :

$$x^7 = x^3 \cdot x^4 \quad \text{לפי חוק חיבור המעריכים,}$$

$$x^{10} = x^6 \cdot x^4 \quad \text{וגם}$$

לכן  $x^4$  הוא גורם משותף בכל המחברים, וניתן להוציאו מחוץ לסוגריים:

$$\begin{aligned} x^{10} + x^7 + 3x^4 &= x^4 \cdot x^6 + x^4 \cdot x^3 + x^4 \cdot 3 \\ &= x^4(x^6 + x^3 + 3) \end{aligned}$$

### שאלה 23

פשטו את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } (3x)^3 \quad \text{ב. } (y^3)^2 \quad \text{ג. } (2x^2y^3)^2$$

$$\text{ד. } (x^2 + y)(x^3 - y) \quad \text{ה. } (x^3 + 2x^5)^2 \quad \text{ו. } (x^2 + 2)^3$$

$$\text{ז. } (2 + x^{-1})(x + 3x^{-2}) \quad \text{ח. } (x + x^{-1})^2$$

הערה: בסעיפים ה,ו,ח מומלץ להיעזר בנוסחאות הכפל המקוצר.

התשובה בעמוד 205

### שאלה 24

מצאו כמה ספרות יש בהצגה העשרונית של המספרים הבאים:

$$\text{א. } 10^{10} \cdot 100 \quad \text{ב. } 100^{100} \quad \text{ג. } (10^{10})^{10}$$

$$\text{ד. } 10^{(10^{10})} \quad \text{ה. } 10^{-3} \quad \text{ו. } 100^{-10}$$

התשובה בעמוד 205

### שאלה 25

פרקו לגורמים את הביטויים הבאים, על ידי מציאת גורם משותף לכל המחברים:

$$\text{א. } x^3 - x^8 \quad \text{ב. } (ab)^5 - 8a^7 \quad \text{ג. } (xy)^5 + (2xy)^3 + 3y^2$$

התשובה בעמוד 206

מחוקי החזקות היסודיים נסיק חוקים הנוגעים לפעולת החילוק:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad \text{חוק חיסור המעריכים:}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{חוק פילוג החזקה מעל חילוק:}$$

הנה הוכחתם של חוקים אלה:

להוכחת החוק הראשון, נתבונן תחילה בזהות הבאה –

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m \quad (\text{לפי חוק חיבור המעריכים})$$

$$\frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} \quad \text{נחלק את שני אגפי הזהות ב- } a^n:$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

לאחר צמצום  $a^n$  באגף שמאל מתקבל:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^n = a^n$$

להוכחת החוק השני, נתבונן בזהות

(לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

נחלק את שני האגפים ב- $b^n$ , נצמצם ונקבל

נתרגל חוקים אלה בשאלה הבאה:

## שאלה 26

א. פשטו את הביטוי הבא:  $\frac{x^8 + 2x^4}{2x^5 - x^3}$ .

הדרכה: פרקו לגורמים את המונה ואת המכנה.

ב. פשטו:  $\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2$ .

ג. הציגו את הביטוי  $xy^{-2} + x^2y^{-6}$  כשבר אלגברי.

ד. פשטו:  $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^6$ .

התשובה בעמוד 206

## סיכום שיעור 2

בשיעור זה התוודענו אל היכולת לייצג משתנים מספריים בעזרת אותיות. פעולה זו תורמת להבנה מעמיקה של תכונות הפעולות החשבוניות השונות. הכרנו את תכונות היסוד של פעולות החשבון בלשון אלגברית, את נוסחאות הכפל המקוצר ואת חוקי החזקות. למדנו כיצד לפתח זהויות חדשות מזהויות קיימות. למדנו את הטכניקה של פישוט ביטויים אלגבריים, פתיחת סוגריים וטיפול בשברים אלגבריים. כל אלה יהיו נדבך יסודי וחשוב בכל לימודינו הבאים.

## שאלות להערכה עצמית

## שאלה 27

פשטו את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } (x+1)(x-6) \quad \text{ב. } (x-3)(y+1) \quad \text{ג. } \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x}$$

$$\text{ד. } \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^{-1} \quad \text{ה. } \frac{-x + y^{-1}}{2 - xy^{-1}} \quad \text{ו. } (a^5 + 2a^6)^3$$

$$\text{ז. } \left(a - \frac{2}{3}\right)\left(2 - \frac{a}{3}\right)\left(3 - \frac{2}{a}\right) \quad \text{ח. } \left(\frac{x}{2} - \frac{3x}{4}\right)^{-2}$$

התשובה בעמוד 207

## שאלה 28

הציבו ופשטו:

$$\text{א. בביטוי } x^{100}, \text{ הציבו } x = y^2.$$

$$\text{ב. בביטוי } x + 1/x \text{ הציבו } x \rightarrow 1 - x.$$

$$\text{ג. בביטוי } x^2 + 2x + 3 \text{ הציבו } x = y/(y-1).$$

התשובה בעמוד 209

## שאלה 29

הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\text{א. } a^{50} - b^{50} = (a^{25} + b^{25})(a^{25} - b^{25})$$

$$\text{ב. } a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$

$$\text{ג. } (a^3 + b^4)^2 = a^6 + 2a^3b^4 + b^8$$

$$\text{ד. } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

התשובה בעמוד 209

## שאלה 30

היעזרו בפירוק לגורמים כדי לפשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x - 1} \quad \text{ב. } \frac{x^3 + 5x}{(xy)^2 + 2x^3 - xy}$$

$$\text{ג. } \frac{x^8 - x^3}{(1+x)^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{x}{xy + y^2} - \frac{y}{x^2 + xy}$$

התשובה בעמוד 210

## שאלה 31

$$\text{א. הוכיחו את השוויון הבא, לכל } x \text{ שלם: } (2^x)^2 = 4^x$$

$$\text{ב. פשטו את הביטוי: } \frac{4^x - 4^y}{2^x - 2^y}$$

התשובה בעמוד 212

## שאלה 32

א. פרקו לגורמים את הביטוי  $x^3 - 8$ .

ב. פרקו לגורמים את הביטוי  $x^2 - 4$ .

ג. פרקו לגורמים את הביטוי  $x^3 + x^2 + x - 14$  על ידי הוצאת הביטוי  $x - 2$  מחוץ לסוגריים.

רמז: היעזרו בשוויון  $14 = 2^3 + 2^2 + 2$ , ובזהויות שהוכחתם בסעיפים א ו-ב.

התשובה בעמוד 212

## שיעור 3

# משוואות אלגבריות

המתמטיקה היא כלי שימושי ורב עוצמה בפתרון בעיות מחיי היומיום ובתחומי המדע והטכנולוגיה השונים. חלק ניכר מבעיות אלה עוסק בהסקה של מידע מסוים על סמך חלק ממנו, או השתקפות שלו בתופעות אחרות.

נתבונן, למשל, בדוגמה הבאה:

רונית רצתה לצבוע את קירות ביתה, ולצורך כך שכרה את דוד ושמעון. היא שילמה להם 600 שקלים עבור העבודה. שמעון עשה את רוב העבודה, ולכן סוכם בין דוד ושמעון ששמעון יקבל פי 3 מדוד. איך הם חילקו ביניהם את השכר?

נוכל לנסח את הבעיה שלפנינו באופן מתמטי. אם נסמן ב- $D$  את הסכום שדוד קיבל, וב- $S$  את הסכום ששמעון קיבל, אז ידוע לנו שמתקיים:

$$D + S = 600 \quad (\text{סך התשלום לדוד ולשמעון הוא 600 שקלים})$$

$$S = 3D \quad (\text{התשלום לשמעון הוא פי 3 מהתשלום לדוד})$$

$$D + 3D = 600 \quad \text{מתוך נתונים אלה נוכל להסיק כי:}$$

$$4D = 600 \quad \text{כלומר -}$$

$$D = 150 \quad \text{נחלק את שני האגפים ב-4, ונקבל}$$

$$S = 3D = 3 \cdot 150 = 450 \quad \text{לכן,}$$

מצאנו אפוא, שדוד קיבל 150 שקלים ושמעון קיבל 450 שקלים.

בדוגמה שניתחנו, המשימה היתה חישוב של גדלים מספריים לא ידועים, על סמך מידע מסוים הנתון עליהם. גדלים אלה, אשר סימנו באותיות  $D$  ו- $S$ , נקראים **נעלמים**. את המידע הנתון עליהם רשמנו בצורה של שוויונות אלגבריים הנקראים **משוואות**.

על המשוואות הפעלנו שורה של צעדים אלגבריים עד שהגענו לפתרון: מצאנו את ערכם של הנעלמים. במהלך צעדים אלה, התייחסנו אל הנעלמים כאל מספרים המצייתים לחוקי האלגברה המוכרים לנו.

המהלך המחשבתי שביצענו בדוגמה זו דומה לתהליכי חשיבה מתחומים אחרים של החיים. לדוגמה, חוקרי משטרה המחפשים את האשם בביצוע פשע מסוים מסתמכים על מידע חלקי כגון עקבות שהשאיר בזירה, עדויות של עוברי אורח, או טביעות אצבע. בשורה של צעדים

מחשבתיים ומעשיים הם הולכים ומצמצמים את רשימת החשודים, עד שהם נותרים עם חשוד יחיד המואשם בבית המשפט.

במהלך החקירה המשטרתית, החוקרים שלא יודעים עדיין את זהותו של הפושע, מצליחים להגיע למסקנות לגבי זהותו, מעצם ההנחה על קיומו. באופן אנלוגי, כאשר הגענו למשוואה  $4D = 600$ , לא ידענו עדיין את ערכו של  $D$ , אך ידענו שהוא מספר המציית לחוקי האלגברה; לכן יכלנו לחלק את שני אגפי המשוואה ב-4 ולקבל  $D = 150$ , ובכך לחשוף את זהותו של הנעלם.

בשיעור זה נכיר סוגים שונים של משוואות ונלמד על דרכי הפתרון שלהן, ויישומיהן בבעיות מעשיות.

## הגדרת מושגי המשוואה והפתרון

**משוואה** היא ביטוי המציין שוויון בין שתי תבניות מספר. למשתנים המופיעים בתבניות אלה קוראים בשם **נעלמים**.

בניגוד לזהות מתמטית, משוואה לא חייבת להיות נכונה עבור כל הצבה חוקית של ערכי המשתנים (=הנעלמים) שבה.

לדוגמה, המשוואה  $x^2 + 2x = 8$

מתקיימת עבור  $x = 2$ , אך לא נכונה עבור  $x = 0$  או  $x = 1$ .

(נראה בהמשך שהערכים היחידים שעבורם משוואה זו מתקיימת הם  $x = 2$  ו- $x = -4$ ).

ערכים של המשתנים שעבורם משוואה מתקיימת נקראים **פתרון של המשוואה**.

לדוגמה,  $x = 3$  הוא פתרון של המשוואה  $3x + 5 = 14$

**משוואה אלגברית** היא משוואה שבה תבניות המספר הן ביטויים אלגבריים, כלומר, ביטויים המשלבים נעלמים, מספרים קבועים, ואת ארבע פעולות החשבון היסודיות.

לדוגמה, המשוואה  $x + y^2 = 3$  היא אלגברית, כי היא ניתנת לכתיבה בצורה  $x + y \cdot y = 3$ . המשוואה  $2^x = y$  אינה אלגברית, וככלל, משוואות שבהן מופיעים משתנים במעריך החזקה אינן אלגבריות. משוואות כאלה נקראות **משוואות מעריכיות**, ועליהן נלמד בשיעור 7.

אוסף של כמה משוואות נקרא **מערכת משוואות**. נהוג לאגד את המשוואות בסימון  $\{$ . הנה דוגמה למערכת משוואות:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + y^2 = 16 \end{cases}$$

המערכת שבדוגמה היא מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים.

הצבה של ערכים עבור כל הנעלמים במערכת נקראת פתרון של המערכת אם היא מקיימת את כל המשוואות שבמערכת.

לדוגמה, במערכת שלעיל, ההצבה  $x = 4, y = 2$  היא פתרון של המערכת, כי מתקיים:

$$\begin{cases} 2 \cdot 4 + 2 = 10 \\ 3 \cdot 4 + 2^2 = 16 \end{cases}$$

ההצבה  $x = 2, y = 6$  אינה פתרון של המערכת. היא אמנם מקיימת את המשוואה הראשונה, אך לא את השנייה.

דוגמה נוספת למערכת משוואות ראינו בתחילת השיעור: המערכת

$$\begin{cases} D + S = 600 \\ S = 3D \end{cases}$$

במקרה זה, מצאנו פתרון של המערכת:  $D = 150, S = 450$ . יתרה מכך, הצעדים שביצענו מוכיחים שפתרון זה הוא הפתרון **היחיד** של המערכת.

### כללי היסק בפתרון משוואות

הדרך הנפוצה ביותר לפתרון משוואה, או מערכת של משוואות, היא שימוש בכללי היסק המאפשרים להסיק משוואות חדשות מתוך המשוואות הנתונות. על תהליך זה חוזרים שוב ושוב בהתאם לצורך – בכל שלב מסיקים משוואות חדשות מתוך המשוואות שכבר התקבלו. בסופו של התהליך מגיעים למשוואה, או לכמה משוואות, מהצורה:

מספר = נעלם

בדרך זו מוצאים את ערכו של כל נעלם במשוואה.

לבסוף, בודקים אם אכן הערכים שמצאנו מקיימים את המשוואה, או המשוואות, שמהן התחלנו.

כללי ההיסק של משוואות חדשות ממשוואות קיימות הם למעשה כללי היסק של שוויונות באופן כללי. הכלל הבא הוא הכלל הבסיסי ביותר:

### ביטויים שווים הם ברי החלפה בתוך כל ביטוי או שוויון.

נציג כעת מספר כללי היסק שימושיים, הנובעים מכלל זה ומחוקי האלגברה שהכרנו בשיעור הקודם. כל כלל ינוסח באופן אלגברי לגבי שוויונות, ולאחר מכן תוצג משמעותו המעשית בפתרון משוואות.



א. אם  $a = b$  אז גם  $a + c = b + c$ .

המשמעות: ניתן לחבר את אותו מספר או ביטוי לשני האגפים של משוואה נתונה.

לדוגמה: בהינתן המשוואה  $x - 5 = 7$

נחבר לשני האגפים את המספר 5, ונקבל:  $(x - 5) + 5 = 7 + 5$

נזכור ש- $x$  מייצג מספר, ולכן מציית לחוקי האלגברה הרגילים. לכן נוכל להציג את

המשוואה האחרונה כך:  $x = 12$

הוכחנו אפוא שאם  $x$  מקיים את המשוואה  $x - 5 = 7$  אז  $x$  הוא 12.

להשלמת משימת פתרון המשוואה, נוודא ש- $x = 12$  אכן מקיים את המשוואה:

$$12 - 5 = 7$$

אכן,  $x = 12$  מקיים את המשוואה  $x - 5 = 7$ , ולאור מה שהוכחנו, הוא הפתרון היחיד של משוואה זו.

ב. אם  $a = b$  אז גם  $a - c = b - c$ .

המשמעות: ניתן לחסר את אותו מספר או ביטוי משני האגפים של משוואה נתונה.

לדוגמה: בהינתן המשוואה  $x + 4 = 9$

נחסר משני אגפי המשוואה את המספר 4:  $(x + 4) - 4 = 9 - 4$

כלומר,  $x = 5$

ואכן,  $x = 5$  מקיים את המשוואה  $x + 4 = 9$ :  $5 + 4 = 9$

ג. אם  $a = b$  אז גם  $ac = bc$

המשמעות: ניתן להכפיל את שני האגפים של משוואה נתונה באותו מספר או ביטוי.

למשל, אם נתונה המשוואה  $x + y^2 = y$

ניתן להכפיל את שני האגפים ב-2 ולקבל:  $2x + 2y^2 = 2y$

ניתן גם להכפיל את שני האגפים ב- $x$  ולקבל:  $x^2 + xy^2 = xy$

משמעות הצעד שביצענו היא: אם המשוואה המקורית  $x + y^2 = y$  מתקיימת עבור ערכי

$x, y$  מסוימים, אז מתקיימות גם המשוואות החדשות שהסקנו עבור אותם ערכי  $x, y$ .

ד. אם  $a = b$  ו- $c \neq 0$  אז גם  $a/c = b/c$ .

המשמעות: ניתן לחלק את שני האגפים של משוואה נתונה באותו מספר או ביטוי, כל

עוד ידוע שערך המספר או הביטוי שונה מאפס.

$$3x = 10$$

למשל, אם נתונה המשוואה

$$\frac{3x}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה ב־3 ולקבל:}$$

$$x = \frac{10}{3} \quad \text{כלומר:}$$

$$3 \cdot \frac{10}{3} = \frac{30}{3} = 10 \quad \text{ואכן, } x = 10/3 \text{ מקיים את המשוואה } 3x = 10:$$

$$(x+2)(x-1) = 5(x-1) \quad \text{כדוגמה נוספת, נתבונן במשוואה}$$

לכאורה, ניתן לחלק את שני אגפי המשוואה ב־ $x-1$  ולצמצם ביטוי זה משני האגפים. אך עלינו להיות זהירים, שכן ייתכן שהביטוי  $x-1$  מתאפס (כלומר, שווה לאפס), ואז לא ניתן לחלק בו את שני האגפים.

כדי להתגבר על קושי זה, נתבונן בנפרד במקרים: (א)  $x-1=0$  (ב)  $x-1 \neq 0$ .

במקרה הראשון נובע (תוך שימוש בשיטה של סעיף א) ש־ $x=1$ . ואכן,  $x=1$  מקיים את המשוואה המקורית:

$$(1+2) \cdot (1-1) = 0 = 5 \cdot (1-1)$$

במקרה השני ( $x-1 \neq 0$ ) נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה המקורית ב־ $x-1$ . מתקבלת המשוואה:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x-1}$$

$$x+2=5 \quad \text{לאחר צמצום השברים, נקבל:}$$

$$x=3 \quad \text{נחסר 2 משני האגפים ונקבל}$$

ואכן,  $x=3$  מקיים את המשוואה המקורית:

$$(3+2) \cdot (3-1) = 10 = 5 \cdot (3-1)$$

הוכחנו אפוא שפתרונות המשוואה הם:  $x=1$  ו־ $x=3$ .

כללים א-ד הם למעשה מקרים פרטיים של הכלל הבא:

ה. אם מבצעים את אותה פעולה על שני האגפים של שוויון, ופעולה זו חוקית, מתקבל שוויון.

בכללים א-ד הפעולה שבוצעה על שני האגפים היתה הוספת מספר או ביטוי, או כפל במספר, או חיסור מספר, או חלוקה במספר שונה מאפס.

$$a^2 = b^2 \text{ אז } a = b \text{ או } a = -b \quad \text{דוגמה נוספת לכלל זה: אם}$$

משמעות דוגמה זו לגבי משוואות: ניתן להעלות את שני האגפים של משוואה בריבוע.

$$\text{לכן, למשל, מהמשוואה } x+y=5, \text{ נוכל להסיק את המשוואה } (x+y)^2=25.$$

ו. אם מתקיימים השוויונות הבאים:

$$a = b$$

$$c = d$$

אז מתקיימים גם השוויונות:

$$a + c = b + d$$

$$a - c = b - d$$

$$ac = bd$$

אם, בנוסף, מתקיים  $c \neq 0$  אז

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

המשמעות: ניתן לחבר משוואות זו לזו, לכפול אותן זו בזו, ולחסר אותן זו מזו. ניתן גם לחלק משוואות זו בזו, אם ידוע לנו שאגפי המשוואה שבה מחלקים לא מתאפסים.

לדוגמה, אם נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

נחבר את שתי המשוואות:

$$(x + y) + (x - y) = 24$$

מכאן נקבל

$$2x = 24$$

נחלק ב-2:

$$x = 12$$

כדי למצוא את  $y$ , נחסר את המשוואה השנייה (במערכת המשוואות המקורית) מהראשונה:

$$(x + y) - (x - y) = 16$$

מכאן נקבל

$$2y = 16$$

נחלק ב-2:

$$y = 8$$

קיבלנו שאם  $x = 12$  ו- $y$  מקיימים את מערכת המשוואות המקורית, אז בהכרח  $x = 12$  ו- $y = 8$ . נבדוק אם ערכים אלה מקיימים את המשוואה המקורית:

$$\begin{cases} 12 + 8 = 20 \\ 12 - 8 = 4 \end{cases}$$

אכן, הערכים  $x = 12$ ,  $y = 8$  מקיימים את מערכת המשוואות, והם הפתרונות היחידים של מערכת זו.

ז. אם  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

אז  $ad = bc$

(להיסק זה קוראים לעתים כפל באלכסון).

כלל זה נובע מהכללים שכבר הכרנו: אם נכפול את שני אגפי השוויון  $a/b = c/d$  ב-  $bd$  יתקבל, לאחר צמצום, השוויון  $ad = bc$ .

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{8}$$

נדגים את הכלל בפתרון המשוואה הבאה:

$$3 \cdot 8 = 5x$$

נכפול באלכסון ונקבל:

$$x = \frac{3 \cdot 8}{5} = \frac{24}{5}$$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב-5:

$$3 : \frac{24}{5} = 3 \cdot \frac{5}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \quad \text{נוודא שערך זה מקיים את המשוואה המקורית:}$$

מצאנו אפוא ש-  $x = 24/5$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

בשאלה הבאה נתרגל את השימוש בכללים אלה.

### שאלה 1

פתרו את המשוואות הבאות:

ב.  $x - 3 = 7$

א.  $x + 5 = 20$

ד.  $5x = 10$

ג.  $3 - x = 10$

ו.  $\frac{x-2}{3} = 5$

ה.  $2x + 3 = 15$

ח.  $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 6 \end{cases}$

ז.  $\frac{5}{2-x} = \frac{2}{3}$

י.  $5(x+1) = (x+1)(x+2)$

ט.  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

יב.  $(x+1)^2 = x^2 + 11$

יא.  $x^2 - 4 = 5(x+2)$

התשובה בעמוד 213

בהמשך שיעור זה נכיר סוגים שונים של משוואות. לחלק מסוגי המשוואות שנכיר יהיו שיטות מוגדרות לפתרון. לסוגים אחרים לא תהיה שיטת פתרון מוכתבת מראש, אך הכלים שלמדנו ושעוד נלמד, והניסיון שתצברו בפתרון משוואות, יסייעו לכם במשימת פתרון. ידיעת הכללים והמיומנות בשימוש בהם יאפשרו לכם לברור בבטחה את הנוסחה אל פתרון משוואות ובעיות. התנסות זו מלווה לעתים בניסוי וטעייה: ביצוע פעולות על המשוואות הנתונות, עד אשר מגיעים לצורה מוכרת או קלה לפתרון. תהליך החיפוש הוא חלק טבעי בהתרתן של בעיות מתמטיות. כאשר הכללים מוכרים וברורים, הוא הופך למשחק מאתגר ומרתק.

## משוואות לינאריות בנעלם אחד

נתמקד עתה בסוג מסוים של משוואות: משוואות מהצורה  $ax + b = c$

כש-  $x$  הוא הנעלם, ו-  $a, b, c$  הם פרמטרים, כלומר, משתנים שניתן להציב בהם ערכים כרצוננו, ולקבל משוואה ספציפית. אנו נניח ש-  $a \neq 0$ .

לדוגמה:

עבור  $a = 2, b = 1, c = 3$  תתקבל המשוואה  $2x + 1 = 3$   
עבור  $a = 5, b = -3, c = 0$  תתקבל המשוואה  $5x - 3 = 0$

משוואה מצורה זו נקראת **משוואה לינארית בנעלם אחד**.

כבר נתקלנו במשוואות מצורה זו, ואף למדנו כיצד לפתורן.

כדי למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה  $ax + b = c$   
נחסר משני האגפים את  $b$ :

$$ax = c - b$$

נחלק ב-  $a$ :

$$a \frac{c - b}{a} + b = (c - b) + b = c$$

נוודא שערך זה מקיים את המשוואה:

ובכן מצאנו שלמשוואה  $ax + b = c$  יש פתרון אחד ויחיד, והוא הערך  $x = (c - b)/a$ .  
אין צורך לזכור נוסחה זו בעל פה, כי ניתן לפתור כל משוואה ספציפית על ידי שימוש בכללי ההיסק שכבר הכרנו.

הצורה  $ax + b = c$  היא אמנם הצורה הכללית של משוואה לינארית בנעלם אחד, אך לעתים נתונות משוואות כאלה ב"תחפושיות" שונות, ונדרשים כמה צעדי היסק כדי להגיע לצורה הפשוטה והמוכרת. נראה כמה דוגמאות לכך.

א. נתבונן במשוואה:  $2x + 7x = 18$   
בעזרת חוק הפילוג נקבל:  $2x + 7x = (2 + 7)x = 9x$

לכן נובע מהמשוואה המקורית ש-  $9x = 18$

נחלק ב-9:  $x = 2$   
נציב ונוודא:  $2 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 4 + 14 = 18$

מצאנו אפוא ש-  $x = 2$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$5x + 8 = 10x - 7 \quad \text{ב. נתבונן במשוואה}$$

$$8 = 10x - 7 - 5x \quad \text{נחסר } 5x \text{ משני האגפים:}$$

$$8 = 10x - 5x - 7 \quad \text{נארגן מחדש:}$$

$$15 = 10x - 5x \quad \text{נוסיף 7 לשני האגפים:}$$

$$10x - 5x = (10 - 5)x = 5x \quad \text{לפי חוק הפילוג:}$$

$$15 = 5x \quad \text{לכן:}$$

$$5x = 15 \quad \text{כלומר,}$$

$$x = 3 \quad \text{נחלק ב-5:}$$

$$5 \cdot 3 + 8 = 23 = 10 \cdot 3 - 7 \quad \text{נציב ונוודא:}$$

לכן  $x = 3$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$\frac{2x+1}{3x-2} = 5 \quad \text{ג. נתבונן במשוואה}$$

$$2x+1 = 5(3x-2) \quad \text{נכפיל את שני אגפי המשוואה ב- } 3x-2:$$

$$2x+1 = 15x-10 \quad \text{נפתח את הסוגריים, לפי חוק הפילוג:}$$

$$15x-10-2x=1 \quad \text{כעת נחסיר } 2x \text{ משני האגפים:}$$

$$13x-10=1 \quad \text{לאחר ארגון מחדש, ושימוש בחוק הפילוג, נקבל}$$

$$13x=11 \quad \text{נוסיף 10 לשני אגפי המשוואה:}$$

$$x = \frac{11}{13} \quad \text{נחלק ב-13:}$$

לסיים, נציב ונוודא:

$$\frac{2 \cdot \frac{11}{13} + 1}{3 \cdot \frac{11}{13} - 2} = \frac{22 + 13}{13} : \frac{33 - 2 \cdot 13}{13} = \frac{35}{13} \cdot \frac{13}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

לכן  $x = 11/13$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

בדוגמאות לעיל נעזרנו בטכניקה נפוצה של **העברת אגפים**. פעולה זו מתבצעת על ידי הוספת הנגדי לאחד המחוברים שבאחד האגפים, לשני אגפי המשוואה. באופן זה המחובר מתבטל בצד אחד של המשוואה, ומופיע בסימן נגדי בצד השני.

$$5x + 8 = 10x - 7 \quad \text{למשל, בדוגמה ב, המשוואה היתה}$$

כדי להעביר את  $5x$  לאגף הימני, הוספנו את הנגדי,  $-5x$ , לשני האגפים, ובמילים אחרות, חיסרנו  $5x$  משני האגפים. באופן זה  $5x$  נעלם מאגף שמאל והופיע בסימן  $-$  באגף ימין:

$$8 = 10x - 7 - 5x$$

לאחר מכן, כדי להעביר את 7 מאגף ימין לאגף שמאל, הוספנו 7 לשני האגפים, כי 7 מופיע כמחוסר: ניתן לרשום את המשוואה בצורה

$$8 = 10x + (-7) + (-5x)$$

לכן חיברנו את המספר הנגדי ל-7, כלומר את 7.

$$8 + 7 = 10x - 5x$$

העברת האגפים מאפשרת לנו לרכז באגף אחד את כל הכפולות של  $x$  ובאגף השני את כל המספרים הקבועים; ומשם, כפי שראינו בדוגמאות, קצרה הדרך לפתרון.

## שאלה 2

פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $2x + 3x - 4 = 16$

ב.  $3x + 7 = 5x - 9$

ג.  $8 - x = \frac{x}{3} - 4$

ד.  $\frac{x}{x-7} = 10$

ה.  $x + 3 = 3(x - 5)$

ו.  $5\left(3 - \frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = 10$

ז.  $\frac{2x-1}{7+x} = \frac{2}{3}$

ח.  $\frac{2}{x} + \frac{1}{3} = 3$

התשובה בעמוד 216

## סוגים של היקש לוגי

כללי ההיסק של משוואות חדשות ממשוואות נתונות, שאותם הכרנו, מנוסחים (או ניתנים לניסוח) בלשון "אם... אז...".

לדוגמה, הכלל המאפשר להוסיף מספר או ביטוי לשני אגפים של משוואה נוסח כך:

אם  $a = b$  אז  $a + c = b + c$

$$2x - 1 = 7$$

בהתאם לכלל זה, מהמשוואה

$$2x = 8$$

ניתן להסיק את המשוואה

משמעות היסק זה היא שאם  $x$  מקיים את המשוואה  $2x - 1 = 7$  אז  $x$  מקיים את המשוואה  $2x = 8$ .

במילים אחרות, כל מספר  $x$  המקיים את המשוואה  $2x - 1 = 7$ , מקיים גם את המשוואה  $2x = 8$ .

להיסק כזה קוראים **גרירה לוגית**, או **נביעה לוגית**, והוא מסומן כך:

$$2x - 1 = 7 \Rightarrow 2x = 8$$

כדי לפתור את המשוואה  $2x - 1 = 7$ , מבצעים כמה צעדים של גרירה לוגית לפי כללי ההיסק:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 7 \\ \Rightarrow 2x &= 8 && \text{(הוספת 1 לשני האגפים)} \\ \Rightarrow x &= 4 && \text{(חלוקת שני האגפים ב-2)} \end{aligned}$$

משרשרת הגרירות מתקבל שאם  $x$  מקיים את המשוואה  $2x - 1 = 7$  אז  $x = 4$ . אך איננו בטוחים עדיין ש- $x = 4$  מקיים את המשוואה  $2x - 1 = 7$ , וכדי לבדוק זאת מציבים  $x = 4$  במשוואה ומוודאים שהיא מתקיימת:

$$2 \cdot 4 - 1 = 7$$

האם צעד זה של בדיקת הפתרון באמת הכרחי? – מיד נראה שהתשובה, ברמה העקרונית, היא חיובית. הסיבה לכך היא שצעדי גרירה לוגית יכולים להגדיל את קבוצת הפתרונות, ולהוסיף פתרונות שגויים.

נתבונן, לדוגמה, במשוואה הבאה:

$$x - 1 = 3$$

נוכל לפתור אותה בנקל ולקבל ש- $x = 4$ .

אך מה יקרה אם נכפיל את שני אגפי המשוואה בביטוי  $x - 2$ ?

תתקבל המשוואה:

$$(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$$

הצעד שביצענו הוא צעד לגיטימי על פי כללי ההיסק, ולכן מתקיימת הגרירה הלוגית

$$x - 1 = 3 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$$

כל  $x$  שמקיים את המשוואה  $x - 1 = 3$  מקיים גם את המשוואה

$$(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$$

ואכן,  $x = 4$  מקיים את המשוואה הזו:

$$(4 - 1) \cdot (4 - 2) = 6 = 3 \cdot (4 - 2)$$

אבל, גם  $x = 2$  מקיים את המשוואה החדשה:

$$(2 - 1) \cdot (2 - 2) = 0 = 3 \cdot (2 - 2)$$

אך  $x = 2$  אינו פתרון של המשוואה המקורית: בוודאי לא מתקיים  $2 - 1 = 3$ .

נסכם: כאשר מתקיימת גרירה לוגית בין שתי משוואות, כל פתרון של המשוואה המקורית הוא גם פתרון של המשוואה החדשה. לכן לא נאבד פתרונות במעבר מהמשוואה המקורית למשוואה החדשה. אך יש מקרים שבהם יתווספו לנו פתרונות שגויים: פתרונות של המשוואה החדשה שאינם פתרונות של המשוואה המקורית.

לכן, לאחר שורה של גרירות לוגיות, עלינו לבדוק את הפתרונות שקיבלנו ולוודא שהם מקיימים את המשוואה המקורית.



נחזור לאנלוגיה שהוצגה בתחילת השיעור. המטרה מחפשת את האשם בביצוע פשע מסוים. נניח, לדוגמה, שהפשע הוא שוד בחנות תכשיטים, ובמצלמות האבטחה התגלה שהשוד נמלט במכונית כחולה מתוצרת חברת סוסיתא. החוקרים מגיעים למסקנה שהשודד הוא בעל מכונית סוסיתא כחולה. אפשר לנסח גרירה לוגית זו כך: "אם  $x$  שדד את החנות, אז  $x$  הוא בעל סוסיתא כחולה".

ובכן, מה"משוואה" המקורית שאותה ביקשו החוקרים לפתור ( $x$  שדד את החנות), הם הסיקו משוואה חדשה:  $x$  הוא בעל סוסיתא כחולה. למשוואה החדשה יש יותר פתרונות מלמשוואה המקורית: הפתרונות שנוספו הם כל הבעלים התמימים של סוסיתא כחולה, אשר לא שדדו את החנות. יש לבדוק באמצעים אחרים, לגבי כל אחד מבעלי מכונית כזו, אם הוא מקיים את המשוואה המקורית – כלומר, אם הוא השודד.

### שאלה 3

נתבונן במשוואה:  $x - 1 = 2$ .

א. מהו פתרון המשוואה?

ב. איזו משוואה מתקבלת מהעלאת שני האגפים בריבוע? מהי הגרירה הלוגית המתקבלת?

ג. ודאו שפתרון המשוואה המקורית הוא גם פתרון של המשוואה החדשה שהתקבלה.

ד. נסו למצוא ערך של  $x$  שהוא פתרון של המשוואה החדשה אך אינו פתרון של המשוואה המקורית.

כעת נחזור למשוואה  $2x - 1 = 7$  ולדרך פתרונה:

$$2x - 1 = 7$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \quad (\text{הוספת 1 לשני האגפים})$$

$$\Rightarrow x = 4 \quad (\text{חלוקת שני האגפים ב-2})$$

במקום להציב  $x = 4$  במשוואה המקורית, נהפוך את סדר ההיקשים הלוגיים:

$$x = 4$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \quad (\text{נכפיל את שני האגפים ב-2})$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 7 \quad (\text{נפחית 1 משני האגפים})$$

גילינו אפוא, מבלי להציב, שאם  $x = 4$  אז  $x$  מקיים את המשוואה המקורית  $2x - 1 = 7$ . הצעדים בהוכחת הגרירה בכיוון ההפוך היו הצעדים ההפוכים לפתרון המשוואה המקורית: הפחתנו 1 במקום שבו הוספנו 1, הכפלנו ב-2 במקום שבו חילקנו ב-2.

המסקנה מדוגמה זו היא שיש מעברים לוגיים הניתנים להיפוך, כלומר מצבים שבהם  $A$  גורר את  $B$ , וגם  $B$  גורר את  $A$ . מצב כזה נקרא **גרירה דו-כיוונית** או **שקילות לוגית**, ומסומן כך:

$$A \Leftrightarrow B$$

במצב זה אומרים ש- $A$  נכון **אם ורק אם**  $B$  נכון.

התשובה בעמוד 218

כאשר יש שקילות לוגית בין שתי משוואות, לא נוספים פתרונות במעבר ממשוואה אחת לשנייה. קבוצת הפתרונות של המשוואה הראשונה היא בדיוק קבוצת הפתרונות של המשוואה השנייה. לכן, אם ניתן להגיע דרך שקילויות לוגיות בלבד מהמשוואה המקורית למשוואה מהצורה "מספר = נעלם", אז אין צורך להציב את המספר שקיבלנו כערך הנעלם במשוואה המקורית; אנו יודעים מראש שמספר זה הוא פתרון של המשוואה.

ראינו שהמעברים הלוגיים בפתרון המשוואה  $2x - 1 = 7$  ניתנים להיפוך, ולכן נוכל להציג את דרך פתרון המשוואה כך:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 7 \\ \Leftrightarrow 2x &= 8 && \text{(הוספת 1 לשני האגפים)} \\ \Leftrightarrow x &= 4 && \text{(חלוקת שני האגפים ב-2)} \end{aligned}$$

ברשימה הבאה תמצאו אוסף של כללי היסק שהם שקילויות לוגיות:

א.  $a = b$  אם ורק אם  $a + c = b + c$ .  
המשמעות: הוספת מספר או ביטוי לשני אגפי משוואה מניבה משוואה שקולה למשוואה המקורית.

ב.  $a = b$  אם ורק אם  $a - c = b - c$ .  
המשמעות: חיסור מספר או ביטוי משני אגפי משוואה מניבה משוואה שקולה למשוואה המקורית.

ג. בהנחה ש-  $c \neq 0$ ,  $a = b$  אם ורק אם  $ac = bc$ .  
המשמעות: הכפלת שני האגפים של משוואה במספר או בביטוי **שונים מאפס** מניבה משוואה שקולה למשוואה המקורית.

ד. בהנחה ש-  $c \neq 0$ ,  $a = b$  אם ורק אם  $a/c = b/c$ .  
המשמעות: חלוקת שני האגפים של משוואה במספר או בביטוי **שונים מאפס** מניבה משוואה שקולה למשוואה המקורית.

נראה את הוכחתם של כללים אלה. כשמוכיחים שקילות בין התנאים  $A$  ו- $B$  (כלומר  $A \Leftrightarrow B$ ), יש להוכיח שתי גרירות לוגיות: שהתנאי  $A$  גורר את התנאי  $B$  (כלומר  $A \Rightarrow B$ ), וגם שהתנאי  $B$  גורר את התנאי  $A$  (כלומר  $B \Rightarrow A$ ). כך ננהג בהוכחות שלפנינו.

### הוכחת כלל א:

אם  $a = b$  אז נוסיף את  $c$  לשני האגפים, ונקבל:  $a + c = b + c$ .  
בכיוון ההפוך, אם  $a + c = b + c$  אז נחסר  $c$  משני האגפים ונקבל  $a + c - c = b + c - c$ , כלומר  $a = b$ .

### הוכחת כלל ג:

אם  $a = b$  אז נכפיל את שני האגפים ב- $c$  ונקבל:  $ac = bc$ .  
 בכיוון ההפוך, אם  $ac = bc$  אז נחלק את שני האגפים ב- $c$  (פעולה מותרת כי  $c \neq 0$ ),  
 ונקבל  $a = b$ , כלומר  $(ac)/c = (bc)/c$ .

### שאלה 4

הוכיחו את כללים ב,ד.

### שאלה 5

היעזרו בשקילויות כדי לפתור את המשוואות הבאות:

התשובה בעמוד 218

התשובה בעמוד 218

א.  $5 - 3x = 10$       ב.  $\frac{x+2}{3} = \frac{5x-4}{6}$       ג.  $\frac{12-4x}{x} = 2$

הערה: ראינו שכאשר משתמשים בשקילויות לוגיות, ניתן לחסוך את השלב של בדיקת הפתרון. אך בכל זאת, מומלץ לבדוק את הפתרונות שקיבלתם כדי לוודא שלא השתרבבה טעות לחישוב.

### בעיות מילוליות במשתנה אחד

ננוח מעט מלימוד דרכי פתרון של משוואות, ונראה כיצד ניתן להשתמש במשוואות כדי לפתור בעיות מחיי היומיום. בעיות כאלה נתונות לרוב בניסוח מילולי, וחלק מהאתגר של התרתן הוא בהמרתן למשוואות מתמטיות.

נפתח בדוגמה הבאה:

גילה של עדנה גדול פי 3 מגילו של אחיה הצעיר, אביתר. בעוד 5 שנים יהיה גילה של עדנה גדול פי 2 מגילו של אביתר. בת כמה עדנה?

כדי לפתור את הבעיה, נסמן את גילה של עדנה (בשנים) ב- $x$ .  
 לפי נתוני הבעיה, גילו של אביתר הוא  $x/3$ .  
 בעוד 5 שנים יהיה גילה של עדנה  $x + 5$ , וגילו של אביתר יהיה  $x/3 + 5$ .  
 נתון לנו שגילה של עדנה בעוד 5 שנים יהיה פי 2 מגילו של אביתר באותה עת. כלומר:

$$x + 5 = 2\left(\frac{x}{3} + 5\right)$$

קיבלנו משוואה אלגברית, ועלינו לפותרה.

$$2\left(\frac{x}{3} + 5\right) = 2\frac{x}{3} + 10 = \frac{2}{3}x + 10$$

נפשט את אגף ימין, לפי חוק הפילוג:

$$x + 5 = \frac{2}{3}x + 10$$

לכן המשוואה המקורית שקולה ל:

$$x - \frac{2}{3}x = 10 - 5$$

נעביר אגפים:

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)x = 5$$

נכנס איברים דומים:

$$\frac{1}{3} \cdot x = 5$$

קיבלנו:

$$x = 15$$

נכפיל ב־3:

מצאנו שגילה של עדנה הוא 15 שנים.  
 נוודא: גילו של אביתר הוא שליש מגילה של עדנה, כלומר 5 שנים.  
 בעוד 5 שנים עדנה תהיה בת 20 ואביתר בן 10, ואכן – גילה של עדנה יהיה כפול מגילו של אביתר.

ניתן לזהות כמה שלבים עקרוניים בפתרון שהצגנו:

- הבנת נתוני הבעיה.
- בחירת הגודל שיסומן כנעלם ( $x$ ).
- ביטוי של גדלים אחרים המופיעים בבעיה, בעזרת  $x$ .
- מציאת קשר בין גדלים אלה, וביטוי כמשוואה בנעלם  $x$ .
- פתרון המשוואה.
- ביטוי משמעות הפתרון שמצאנו במונחי הבעיה המילולית.
- בדיקת נכונות הפתרון שמצאנו.

נסו ליישם שלבים אלה בפתרון השאלות הבאות:

## שאלה 6

קילוגרם אפרסקים יקר ב־7 שקלים מקילוגרם תפוחים. דוד קנה 2 ק"ג אפרסקים ו־3 ק"ג תפוחים, ושילם 54 שקלים. מה מחירו של כל מוצר?

התשובה בעמוד 219

## שאלה 7

תמר החלה לעבוד בחברת הביטוח "סמוך עלינו", ולאחר ארבעה חודשים קיבלה העלאת שכר בשיעור של 15%. בסך הכול היה שכרה בשנה הראשונה לעבודתה 116,160 שקלים. מה היה שכרה החודשי בכל שלב?

התשובה בעמוד 220

## בעיות תנועה

נדגים את כוחן של המשוואות בניתוח בעיות הקשורות לתנועה של עצמים. הנוסחה הבסיסית המקשרת בין מהירות, זמן ומרחק היא

$$v = \frac{s}{t}$$

בנוסחה זו  $v$  היא מהירותו של גוף הנע במהירות וכיוון קבועים,  $t$  הוא פרק זמן, ו- $s$  הוא המרחק שעבר הגוף בפרק הזמן הנתון.

לדוגמה, אם מכונית נסעה 60 קילומטר ב-50 דקות (במהירות קבועה), אז המרחק הוא  $s = 60$  (נתון ביחידות של קילומטרים). נבטא את הזמן ביחידות של שעה:

$$50 \text{ דקות} = 50/60 \text{ שעות} = 5/6 \text{ שעות}$$

לכן  $t = 5/6$ , ולפיכך

$$v = \frac{s}{t} = 60 : \frac{5}{6} = 72 \text{ קמ"ש}$$

צורות שקולות של הנוסחה לחישוב המהירות הן:

$$s = v \cdot t \quad (\text{מתקבלת מהכפלת נוסחת המהירות ב-} t)$$

$$t = \frac{s}{v} \quad (\text{מתקבלת מחלוקת הנוסחה האחרונה ב-} v)$$

כעת נתבונן בבעיה הבאה:

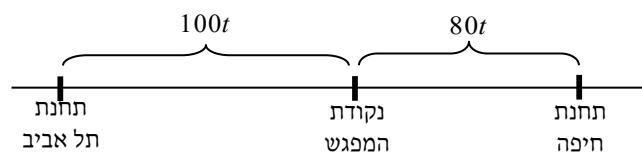
רכבת יוצאת מתל אביב לחיפה במהירות 100 קמ"ש. באותו הזמן יוצאת רכבת מחיפה לתל אביב במהירות 80 קמ"ש. המרחק בין תחנות חיפה ותל אביב הוא 100 ק"מ. לאחר כמה זמן יחלפו הרכבות זו על פני זו, והיכן?

כדי לפתור את הבעיה, נסמן את הזמן שחלף מרגע יציאת הרכבות ב- $t$  (נניח ש- $t$  נתון ביחידות של שעה).

המרחק שעברה הרכבת שיצאה מתל אביב הוא (לפי הנוסחה  $s = vt$ ),  $100t$ .

המרחק שעברה הרכבת שיצאה מחיפה הוא (לפי הנוסחה  $s = vt$ ),  $80t$ .

ברגע שהרכבות חולפות זו על פני זו, המצב הוא כמתואר בתרשים הבא:



לפי הנתון, המרחק בין התחנות הוא 100 ק"מ, ולכן מתקיים:

$$100t + 80t = 100$$

נפתור את המשוואה:

$$\Leftrightarrow 180t = 100 \quad \text{לפי חוק הפילוג,}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \quad \text{נחלק ב-180:}$$

הרכבות יחלפו זו על פני זו לאחר חמש תשיעיות השעה. כדי לבטא זמן זה בדקות, נכפיל אותו ב-60 (מספר הדקות בשעה):

$$\frac{5}{9} \cdot 60 = \frac{300}{9} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$$

הרכבות יחלפו זו על פני זו כעבור 33 דקות ושליש הדקה, כלומר, כעבור 33 דקות ו-20 שניות. ברגע זה, המרחק שתעבור הרכבת שיצאה מתל אביב הוא:

$$\frac{5}{9} \cdot 100 = 55\frac{5}{9} \approx 55.56$$

$$100 - 55\frac{5}{9} = 44\frac{4}{9} \approx 44.44 \quad \text{המרחק שתעבור הרכבת השנייה הוא}$$

נקודת המפגש היא אפוא כ-55.56 ק"מ מתל אביב, וכ-44.44 ק"מ מחיפה. שימו לב שנקודת המפגש קרובה יותר לחיפה, כי הרכבת שיצאה מתל אביב מהירה יותר מהרכבת שיצאה מחיפה.

## שאלה 8

משאית יצאה מירושלים לכיוון תל אביב במהירות 60 קמ"ש. כעבור 5 דקות יצאה בעקבותיה מכונית משטרה במהירות 90 קמ"ש. לאחר כמה זמן הדביקה מכונית המשטרה את המשאית, ומה המרחק שעברה?

התשובה בעמוד 220

## שאלה 9

שני חובבי ריצה רצים באצטדיון, במסלול ריצה מעגלי שאורכו 400 מטרים. הם מתחילים מאותה הנקודה. חובב הריצה המהיר מביניהם משלים כל הקפה בשתי דקות, והאיטי יותר משלים כל הקפה בשלוש דקות. כמה זמן יעבור עד שהרץ המהיר יפגוש את הרץ האיטי בשנית? מה המרחק שיעבור כל אחד מהרצים עד לרגע זה?

התשובה בעמוד 221

## בעיות תפוקה

ניתן להכליל את הנוסחה  $s = v \cdot t$  שלמדנו בסעיף הקודם, לכל מצב שבו כמות מסוימת נצברת או מתמעטת בקצב קבוע. הנוסחה הכללית היא:

$$\text{תפוקה} = \text{קצב} \times \text{זמן}$$

הקצב בנוסחה זו נתון ביחידות של תפוקה ליחידת זמן.

נדגים זאת בפתרון הבעיה הבאה:

בבריכה בנפח של 3000 ליטר ישנם שני ברזי מילוי. האחד ממלא את הבריכה ב־10 שעות, והשני ב־6 שעות. בכמה זמן תתמלא הבריכה אם פותחים את שני הברזים?

**פתרון:**

הברז הראשון ממלא את הבריכה בקצב של  $3000/10 = 300$  ליטרים לשעה, והברז השני ממלא אותה בקצב של  $3000/6 = 500$  ליטרים לשעה.

נסמן ב־ $t$  את הזמן שעבר מרגע פתיחת הברזים ועד למילוי הבריכה (ביחידות של שעה). ברגע זה, כמות המים שמילא הברז הראשון היא  $300t$ , וכמות המים שמילא הברז השני היא  $500t$ . ביחד, מילאו שני הברזים את נפח הבריכה שהוא 3000 ליטר. מתקבלת המשוואה:

$$300t + 500t = 3000$$

$$\Leftrightarrow 800t = 3000 \quad \text{נפתור את המשוואה:}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3000}{800} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

הבריכה תתמלא אפוא לאחר 3 שעות ושלוש רבעי השעה.

**הערה:** למעשה, לא היה צורך לדעת את נפח הבריכה כדי לענות על השאלה. אם נפח הבריכה הוא  $V$  ליטרים, אז כמות המים שממלא הברז הראשון בשעה היא  $V/10$ , וכמות המים שממלא הברז השני בשעה היא  $V/6$ . לאחר  $t$  שעות, הברז הראשון מילא  $(V/10) \cdot t$  ליטרים והברז השני מילא  $(V/6) \cdot t$  ליטרים, ובסך הכול מילאו שני הברזים את הבריכה כולה שנפחה  $V$  ליטרים. מתקבלת המשוואה:

$$\frac{Vt}{10} + \frac{Vt}{6} = V$$

$$\frac{Vt}{10} + \frac{Vt}{6} = Vt \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right) = Vt \cdot \frac{3+5}{30} = Vt \cdot \frac{8}{30} = Vt \cdot \frac{4}{15} \quad \text{נפשט:}$$

$$\Leftrightarrow Vt \cdot \frac{4}{15} = V \quad \text{לכן המשוואה שקיבלנו שקולה ל:}$$

נצמצם את  $V$  בשני האגפים (על ידי חלוקת שני אגפי המשוואה ב־ $V$ ):

$$\Leftrightarrow t \cdot \frac{4}{15} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

וקיבלנו את אותו הפתרון שקיבלנו קודם.

## שאלה 10

לבריכה שתוארה בדוגמה הוסיפו ברז מילוי המסוגל למלא את הבריכה בשעתיים בלבד. בכמה זמן תתמלא הבריכה אם פותחים את שלושת הברזים?

## שאלה 11

בקרעיתיה של ספינה נפער חור, והיא החלה להיות מוצפת במים בקצב של 50 ליטרים בשעה. לאחר שלוש שעות גילה צוות הספינה את ההצפה, והחל לרוקן את המים שהצטברו בקצב של 80 ליטרים בשעה. כל עוד המים לא נוקזו, לא ניתן לתקן את החור והמים ממשיכים לזרום אל הספינה. כמה זמן יעבור עד שינוקזו כל המים מהספינה?

התשובה בעמוד 222

## שאלה 12

בשיעור הקודם למדנו את נוסחת ההמרה של טמפרטורה מצלזיוס לפרנהייט:

$$F = C \cdot \frac{9}{5} + 32$$

- א. בטאו את הטמפרטורה  $50^\circ F$  ביחידות צלזיוס. (הדרכה: הציבו  $F = 50$  בנוסחת ההמרה ופתרו את המשוואה המתקבלת).
- ב. מצאו נוסחה כללית להמרה מפרנהייט לצלזיוס.

התשובה בעמוד 222

## פתרון משוואות בעזרת פירוק לגורמים

נחזור עתה ללמוד על משוואות ועל דרכי הפתרון שלהן. שיטת הפירוק לגורמים מתבססת על הטענה הבאה:

## 3.1 טענה

יהיו  $a, b$  מספרים ממשיים כלשהם. אז  $ab = 0$  אם ורק אם לפחות אחד מבין המספרים  $a, b$  שווה לאפס.

הערה: במתמטיקה כאשר אומרים " $A$  או  $B$ ", מתכוונים לטענה "לפחות אחת מבין הטענות  $A, B$  מתקיימת". טענה זו כוללת את האפשרות ששתי הטענות  $A$  ו- $B$  תתקיימנה יחדיו. מוסכמה זו שונה ממשמעות המילה "או" בחיי היומיום: כשאדם אומר "אסע בקיץ ללונדון או לפריז" בדרך כלל לא מניחים שהוא שוקל לנסוע בקיץ ללונדון וגם לפריז. לפיכך נוכל לנסח את הטענה גם בלשון הבאה:

$$ab = 0 \text{ אם ורק אם } a = 0 \text{ או } b = 0.$$

## הוכחת הטענה

אם  $a = 0$  או  $b = 0$  אז גם  $ab = 0$ , כי ידוע שמכפלה של אפס במספר כלשהו שווה לאפס.

בכיוון ההפוך, נניח ש- $ab = 0$ , ונתבונן בשני מקרים:

מקרה א:  $a = 0$ . במקרה זה אכן נכונה המסקנה:  $a = 0$  או  $b = 0$ .

מקרה ב:  $a \neq 0$ . אז ניתן לחלק את שני אגפי השוויון  $ab = 0$  ב- $a$ . מתקבל:

$$\frac{ab}{a} = \frac{0}{a}$$



$$b = \frac{ab}{a} = \frac{0}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a} = 0$$

לכן, הוכחנו ש- $b = 0$ , ולכן גם במקרה זה נכונה המסקנה:  $a = 0$  או  $b = 0$ .  $\square$

נוכל להוכיח טענה דומה לגבי מכפלת שלושה מספרים:

### טענה 3.2

היו  $a, b, c$  מספרים ממשיים כלשהם.  $abc = 0$  אם ורק אם  $a = 0$  או  $b = 0$  או  $c = 0$ .

### שאלה 13

הוכיחו את הטענה.

התשובה בעמוד 222

באותו אופן ניתן להוכיח את הטענה לגבי כל מספר גורמים. כך מתקבלת הטענה הבאה:

### טענה 3.3

מכפלה של רשימת מספרים כלשהי שווה לאפס אם ורק אם לפחות אחד מבין המספרים שברשימה שווה לאפס.

נשתמש בטענות אלה לפתרון משוואות. נתבונן, למשל, במשוואה

$$(x-1)(x-2) = 0$$

לפי הטענות שהוכחנו, משוואה זו שקולה לכך ש- $x-1 = 0$  או  $x-2 = 0$ .

אנו יודעים את פתרון של המשוואות  $x-1 = 0$  ו- $x-2 = 0$ :

$$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

לכן פתרונות המשוואה  $(x-1)(x-2) = 0$  הם  $x = 1$  ו- $x = 2$ .

באופן כללי, אם נתונה לנו משוואה מהצורה

$$(גורם שני) \cdot (גורם ראשון) = 0$$

או עם מספר גורמים גדול יותר, למשל

$$(גורם שלישי) \cdot (גורם שני) \cdot (גורם ראשון) = 0$$

ניתן לפתור אותה על ידי פתרון בנפרד של כל אחת מהמשוואות:

$$גורם ראשון = 0$$

$$גורם שני = 0$$

$\vdots$

אוסף הפתרונות של המשוואה המקורית מתקבל מאיחוד פתרונות כל המשוואות שהתקבלו.

## שאלה 14

פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $(2x - 1)(5x - 2) = 0$

ב.  $x(x - 5)(20 - 2x) = 0$

ג.  $x^4 - 3x^3 = 0$

ד.  $x^2 + 5x = 2(x + 5)$

ה.  $(x - 2)^3 + 3(x - 2)^2 = 0$

מסקנה נוספת משיטת הפירוק לגורמים היא הטענה הבאה:

## טענה 3.4

יהיו  $a, b$  מספרים ממשיים כלשהם. אז  $a^2 = b^2$  אם ורק אם  $a = b$  או  $a = -b$ .

## הוכחת הטענה

אם  $a = b$  אז נעלה את שני אגפי השוויון בריבוע ונקבל  $a^2 = b^2$ .אם  $a = -b$ , נעלה בריבוע ונקבל

$$a^2 = (-b)^2 = ((-1) \cdot b)^2 = (-1)^2 \cdot b^2 = b^2$$

בכיוון ההפוך, אם  $a^2 = b^2$  אז  $a^2 - b^2 = 0$ . ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)(a - b) = 0$$

מתקבל ש-

לכן, לפי הטענה שהוכחנו,  $a + b = 0$  או  $a - b = 0$ .במקרה הראשון, נחסר  $b$  משני האגפים ונקבל  $a = -b$ .במקרה השני, נחבר  $b$  לשני האגפים ונקבל  $a = b$ .לכן בכל מקרה,  $a = b$  או  $a = -b$ .

□

מטענה זו מתקבלים הפתרונות של משוואה מהצורה  $x^2 = a$ :

## טענה 3.5

יהי  $a$  מספר ממשי, ונתבונן במשוואה  $x^2 = a$ .א. אם  $a$  מספר חיובי, פתרונות המשוואה הם  $x = \sqrt{a}$  ו-  $x = -\sqrt{a}$ .ב. אם  $a = 0$  אז פתרון המשוואה היחיד הוא  $x = \sqrt{a}$  (כלומר,  $x = 0$ ).ג. אם  $a$  מספר שלילי אז למשוואה אין פתרון.

## הוכחה

אם  $a$  מספר חיובי או 0, אז ניתן לבטא את  $a$  כך:  $a = (\sqrt{a})^2$ 

(זוהי הגדרת השורש הריבועי: מספר אי-שלילי שריבועו שווה למספר הנתון).

לכן המשוואה  $x^2 = a$  שקולה ל-  $x^2 = (\sqrt{a})^2$ לפי הטענה האחרונה, פתרונותיה של משוואה זו הם  $x = \sqrt{a}$  ו-  $x = -\sqrt{a}$ .

אם  $a = 0$ , אז  $\sqrt{a} = -\sqrt{a} = 0$  ולכן יש למשוואה פתרון אחד ויחיד,  $x = 0$ .  
 אם  $a$  מספר שלילי אז למשוואה  $x^2 = a$  אין פתרון, שכן, לפי חוקי הסימנים, ריבוע של מספר אינו יכול להיות מספר שלילי.  
 □

## שאלה 15

פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $x^2 = 2$

ב.  $x^2 = 9$

ג.  $(2x + 1)^2 = 4$

ד.  $(2 - x)^2 = -1$

ה.  $(x + 5)^2 = (3x - 1)^2$

ו.  $(2 - x)^2 = (x - 6)^2$

התשובה בעמוד 223

## משוואות ריבועיות

עד כה למדנו בשיטתיות משפחה אחת של משוואות: משוואות לינאריות בנעלם אחד. למשוואות אלה קוראים גם **משוואות ממעלה ראשונה**. במשוואות אלה המחוברים היו רק מספרים קבועים או כפולה של הנעלם במספר קבוע.

כעת נכיר סוג חדש של משוואות, שבהן המחוברים הם קבועים, כפולות של הנעלם בקבוע, וכפולות של ריבוע הנעלם בקבוע. משוואות כאלה נקראות **משוואות ריבועיות** או **משוואות ממעלה שנייה**.

צורתה הכללית של משוואה ריבועית היא:  
 $ax^2 + bx + c = 0$  כאשר  $a, b, c$  מספרים ממשיים ו-  $a \neq 0$ .

$a$ ,  $b$  ו-  $c$  במשוואה זו הם **פרמטרים**: כל הצבה של ערכים עבורם מניבה משוואה ספציפית בנעלם  $x$ .

לדוגמה, עבור הפרמטרים  $a = 3$ ,  $b = -5$  ו-  $c = 2$  מתקבלת המשוואה:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

המספרים  $a$ ,  $b$  ו-  $c$  נקראים **מקדמי המשוואה**.  $a$  הוא **המקדם העליון** (וגם: המקדם של  $x^2$ ),  $b$  הוא המקדם של  $x$ , ו-  $c$  נקרא **המקדם החופשי**.

במקרה ש-  $a = 1$ , המשוואה נקראת **משוואה ריבועית מתוקנת**.

קל להעביר משוואה ריבועית נתונה לצורה מתוקנת, על ידי חלוקתה במקדם העליון:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

פתרונות של משוואה ריבועית נקראים גם **שורשים של המשוואה**. בעמודים הבאים נלמד שיטות לפתרון משוואות ריבועיות, כלומר למציאת שורשיהן.

## שאלה 16

בטאו את המשוואות הבאות כמשוואות ריבועיות, והעבירו אותן לצורה מתוקנת:

א.  $2x^2 = 5x + 3$       ב.  $2(5 - x^2) = 12x + 1$

ג.  $(x + 1)(x + 2) = 6$       ד.  $x + \frac{1}{x} = 8$

ה.  $\frac{x + 5}{2x + 1} = x + 3$

התשובה בעמוד 224

## פתרון משוואות ריבועיות בשיטת הפירוק לגורמים

נתבונן, לדוגמה, במשוואה הריבועית הבאה:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

כדי לפתור אותה, נשים לב לשוויון

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

תוכלו לוודא שוויון זה על ידי פתיחת הסוגריים באגף ימין.

להצגה זו של הביטוי  $x^2 + 5x + 6$  קוראים **פירוק לגורמים לינאריים**.

המשוואה הריבועית שקולה, לפיכך, למשוואה

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

כזכור (טענה 3.1), משוואה זו שקולה לכך ש־  $x + 2 = 0$  או  $x + 3 = 0$ .

לכן פתרונות המשוואה  $x^2 + 5x + 6 = 0$  הם  $x = -2$  (פתרון המשוואה  $x + 2 = 0$ ) ו־  $x = -3$  (פתרון המשוואה  $x + 3 = 0$ ).

פתרון זה הוא אמנם קצר ואלגנטי, אך אינו שיטתי, שכן לא ברור כיצד ניתן לחשוב מראש

על הפירוק  $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ .

כדי להבין זאת טוב יותר, נתבונן במשוואה ריבועית מתוקנת –

$$x^2 + bx + c = 0$$

וננסה להבין מתי מתקיימת הזהות הבאה:

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta)$$

כאשר  $\alpha$  ו־  $\beta$  (אלפא ובתא) הם מספרים ממשיים קבועים.

לצורך כך, נפתח את הסוגריים באגף הימני:

$$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \alpha x + x\beta + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

אם נמצא מספרים  $\alpha$  ו- $\beta$  המקיימים את השוויונות הבאים:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = b \\ \alpha\beta = c \end{cases}$$

אז יתקבל פירוק של הביטוי  $x^2 + bx + c$  לגורמים לינאריים:

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta)$$

ולפיכך המשוואה  $x^2 + bx + c = 0$  תהיה שקולה ל- $(x + \alpha)(x + \beta) = 0$ , ופתרונותיה הם

$$x = -\alpha \text{ ו- } x = -\beta.$$

לדוגמה, במשוואה שניתחנו

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

המקדמים הם  $b = 5, c = 6$ , ולכן המשוואות המתקבלות הן:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases}$$

על ידי ניסוי וטעייה ניתן למצוא את הפתרון  $\alpha = 2, \beta = 3$ , וכך לקבל את הפירוק:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

כדוגמה נוספת, נתבונן במשוואה

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

נוכל לבטא משוואה זו כך:

$$x^2 + (-3) \cdot x + 2 = 0$$

לכן  $b = -3, c = 2$  ומערכת המשוואות המתקבלת היא

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha\beta = 2 \end{cases}$$

המשוואה הראשונה מרמזת שלפחות אחד מבין  $\alpha, \beta$  הוא מספר שלילי. מהמשוואה השנייה מתקבל ששני המספרים  $\alpha, \beta$  חייבים להיות שליליים (אילו אחד מהם היה חיובי ואחד שלילי, אז לפי חוקי הסימנים המכפלה היתה שלילית; ואילו אחד מהם היה 0, המכפלה היתה 0).

בעזרת מידע זה, ומעט ניסוי וטעייה, מתקבל הפתרון  $\alpha = -1, \beta = -2$ . כלומר:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

ופתרונות המשוואה הם  $x = 1$  ו- $x = 2$ .

**נסכם:** כדי לפתור משוואה ריבועית בשיטת הפירוק לגורמים יש להציגה בצורה מתוקנת, ואז לחפש שני מספרים שסכומם יהיה שווה למקדם של  $x$  ומכפלתם תהיה שווה למקדם החופשי. אם מצאנו מספרים כאלה, אז פתרונות המשוואה הם המספרים הנגדיים למספרים אלה.

לא תמיד קל למצוא את המספרים  $\alpha, \beta$  ולכן כוחה של שיטה זו מוגבל למדי. השיטה יעילה בעיקר למשוואות שפתרונותיהן הם מספרים שלמים קטנים. חסרון נוסף של השיטה הוא שלעתים למשוואה ריבועית אין פתרונות כלל, ובשיטה זו לא ניתן לגלות זאת. בקרוב נכיר שיטות נוספות, יעילות ואמינות יותר, לפתרון משוואות ריבועיות.

## שאלה 17

פתרו את המשוואות הבאות בשיטת הפירוק לגורמים:

א.  $x^2 + 7x + 10 = 0$       ב.  $x^2 + 2x - 8 = 0$

ג.  $x^2 - 3x - 28 = 0$       ד.  $x^2 - 8x + 15 = 0$

התשובה בעמוד 225

## פתרון משוואות ריבועיות בשיטת ההשלמה לריבוע

השיטה שנציג כעת, שיטת ההשלמה לריבוע, מאפשרת לפתור כל משוואה ריבועית. השיטה מסתמכת על נוסחת הכפל המקוצר:

$$(1) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(2)  $x^2 + 6x - 1 = 0$       נתבונן, לדוגמה, במשוואה הבאה:

(3)  $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$       כדי לפתור את המשוואה, נשים לב לזהות

זוהי זהות זו נובעת מנוסחת הכפל המקוצר (1), בהצבה  $a = x$  ו-  $b = 3$ .

כעת נחבר 10 לשני אגפי המשוואה (2). מתקבלת המשוואה השקולה:

$$x^2 + 6x + 9 = 10$$

לפי הזהות (3), משוואה זו שקולה למשוואה  $(x + 3)^2 = 10$

לפי טענה 3.5,  $x + 3 = \sqrt{10}$  או  $x + 3 = -\sqrt{10}$ .

יתרה מכך, המשוואה  $(x + 3)^2 = 10$  שקולה לכך שאחת משתי אפשרויות אלה מתקיימת.

בהתאם לכך, פתרונות המשוואה הם:  $x = -3 + \sqrt{10}$  ו-  $x = -3 - \sqrt{10}$ .

נהוג לסמן את הפתרונות של משוואה ריבועית במשתנה  $x$  ב-  $x_1$  ו-  $x_2$ . נוכל אפוא לסמן את פתרונות המשוואה כך:

$$x_1 = -3 + \sqrt{10}, \quad x_2 = -3 - \sqrt{10}$$

בקיצור, נסמן:  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}$

נוודא (למרות שאין חובה לעשות זאת) ש- $x_1$  הוא פתרון של המשוואה (3):

$$\begin{aligned} x_1^2 + 6x_1 - 1 &= (\sqrt{10} - 3)^2 + 6(\sqrt{10} - 3) - 1 \\ &= (\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{10} \cdot 3 + 3^2 + 6\sqrt{10} - 6 \cdot 3 - 1 \\ &= 10 - 6\sqrt{10} + 9 + 6\sqrt{10} - 18 - 1 \\ &= 19 - 19 = 0 \end{aligned}$$

לפי הזהות  
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

באופן דומה ניתן לוודא ש- $x_2$  הוא פתרון של המשוואה.

כפי שראינו, המפתח לפתרון המשוואה הריבועית  $x^2 + 6x - 1 = 0$  היה התבוננות בביטוי  $(x + 3)^2$ . לאחר פתיחת סוגריים בביטוי זה בעזרת נוסחת כפל מקוצר, התקבל הביטוי  $x^2 + 6x + 9$ , הנבדל מאגף שמאל של המשוואה המקורית רק במספר קבוע. לכן על ידי הוספה של מספר קבוע לביטוי  $x^2 + 6x - 1$ , ניתן היה לקבל את הביטוי  $(x + 3)^2$ . זו משמעות השם "השלמה לריבוע": הוספת הנדרש כדי להפוך ביטוי נתון לריבוע של ביטוי אחר.

באופן כללי, כאשר נתונה משוואה ריבועית מתוקנת:

$$x^2 + bx + c = 0$$

נשלים את אגף שמאל לריבוע הביטוי  $x + b/2$ , כלומר לביטוי הבא:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

נדגים זאת בפתרון המשוואה הבאה:

$$(4) \quad x^2 + 4x + 5 = 0$$

במשוואה זו המקדם של  $x$  הוא  $b = 4$ , לכן נתבונן בביטוי  $(x + b/2)^2 = (x + 2)^2$ :

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

כדי להשלים לריבוע נפחית 1 משני אגפי המשוואה המקורית:

$$(4) \quad \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = -1$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = -1$$

למשוואה האחרונה אין פתרון, כי לפי חוקי הסימנים, הריבוע של כל מספר ממשי הוא חיובי או 0, ולכן אינו יכול להיות מספר שלילי.

לכן, למשוואה המקורית  $x^2 + 4x + 5 = 0$  אין פתרון.

**הערה:** אמנם לא מצאנו פתרונות למשוואה (4), אך הוכחנו שאין כאלה. בכך ביצענו את המשימה "לפתור את המשוואה" שפירושה לקיים את תהליך הברור שבסופו מוצאים מהם פתרונות המשוואה. כפי שראינו כעת, לעתים מתגלה בתהליך זה שאין למשוואה פתרונות כלל.

## שאלה 18

פתרו את המשוואות הבאות בשיטת ההשלמה לריבוע:

$$\text{א. } x^2 + 8x + 7 = 0 \quad \text{ב. } x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$\text{ג. } x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{ד. } x^2 - 8x + 10 = 0$$

כדי לפשט את הפתרונות של משוואות ריבועיות, ניעזר בזהויות הבאות:

## טענה 3.6

יהיו  $a, b$  מספרים אי-שליליים. אז מתקיים:  
(תכונה זו נקראת כפליות השורש).

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{אם בנוסף, } b \neq 0 \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

## הוכחה

נסתמך על הזהות הבאה, הנובעת מהגדרת השורש:

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{לכל } a \text{ אי-שלילי,}$$

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab \quad \text{מזהות זו נובע:}$$

ולכן (לפי טענה 3.5),  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$  או  $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ . מכיוון ש- $\sqrt{a}\sqrt{b}$  אינו מספר שלילי, מתקיים בהכרח  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ .

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b} \quad \text{באופן דומה, אם } b \neq 0:$$

$$\square \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{ומכיוון ש- } \sqrt{a}/\sqrt{b} \text{ אינו שלילי, מתקיים בהכרח}$$

בעזרת זהויות אלה ניתן לפשט ביטויי שורש. הנה כמה דוגמאות:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

נהוג לא להשאיר שורשים במכנה בהצגה סופית של פתרון. כדי להימנע מכך, נכפיל את

המונה ואת המכנה בשבר האחרון ב- $\sqrt{3}$ :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



## שאלה 19

פשטו את הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \sqrt{50} & \text{ב. } \sqrt{20} & \text{ג. } \sqrt{\frac{8}{9}} \\ \text{ד. } \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{ה. } (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 & \text{ו. } (2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7}) \\ \text{ז. } \frac{1}{2 - \sqrt{7}} & \text{ח. } \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} \end{array}$$

הדרכה: בסעיף ז הכפילו את המונה ואת המכנה ב- $2 + \sqrt{7}$  והיעזרו בסעיף ו. נסו למצוא פישוט דומה גם בסעיף ח.

התשובה בעמוד 227

## שאלה 20

פתרו את המשוואות הבאות ופשטו את הפתרונות ככל הניתן:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 + 8x - 2 = 0 & \text{ב. } 15x^2 - x - 2 = 0 \\ \text{ג. } 3x^2 + 5x - 12 = 0 \end{array}$$

התשובה בעמוד 228

## נוסחת השורשים לפתרון משוואה ריבועית

נפתח עתה נוסחה כללית לפתרון משוואה ריבועית.

נתבונן במשוואה הריבועית, בצורתה הכללית  $ax^2 + bx + c = 0$

נזכור ש- $a \neq 0, b, c$  הם פרמטרים המייצגים מספרים ממשיים כלשהם.

ראשית, נרשום את המשוואה בצורתה המתוקנת. לצורך כך נחלק ב- $a$ :

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{נעביר את } c/a \text{ לאגף ימין:}$$

כעת נשלים לריבוע. הריבוע שאליו נשלים הוא  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ . לצורך כך נוסיף

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \quad \text{לשני האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{אגף ימין הוא: } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{לכן המשוואה שקולה ל-}$$

נסמן:  $D = b^2 - 4ac$ . ביטוי זה נקרא **הדיסקרימיננטה של המשוואה**  $ax^2 + bx + c = 0$ .

אם  $D$  היא מספר שלילי, אז אגף ימין במשוואה לעיל הוא מספר שלילי, ולכן אינו יכול להיות שווה לריבוע שבאגף השמאלי. לכן למשוואה זו אין פתרון, ולפיכך גם למשוואה המקורית  $ax^2 + bx + c = 0$  אין פתרון.

נניח עתה ש- $D$  מספר חיובי, או 0, ונכפיל את המשוואה ב- $4a^2$ :

$$\Leftrightarrow 4a^2 \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow (2a)^2 \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow \left( 2a \left( x + \frac{b}{2a} \right) \right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{לפי טענה 3.5:}$$

$$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{נפחית } b \text{ משני האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{נחלק ב-} 2a:$$

קיבלנו נוסחה לפתרונות המשוואה הריבועית הכללית. נוסחה זו נקראת **נוסחת השורשים** של משוואה ריבועית.

שימו לב שהביטוי  $D = b^2 - 4ac$  (הדיסקרימיננטה) מופיע בתוך השורש בנוסחה זו. אם  $D = 0$  אז שני הפתרונות המתקבלים מהנוסחה זהים זה לזה, ושונים ל- $-b/(2a)$ . במקרה זה למשוואה הריבועית יש פתרון יחיד. אם הדיסקרימיננטה היא מספר חיובי אז למשוואה יש שני פתרונות שונים זה מזה.

נסכם את תגליותינו בטענה הבאה:

### טענה 3.7 – נוסחת השורשים למשוואה ריבועית

יהיו  $a \neq 0, b, c$  מספרים ממשיים, ונתבונן במשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$ .

נסמן  $D = b^2 - 4ac$  (הדיסקרימיננטה של המשוואה).

- אם  $D$  מספר שלילי אז אין למשוואה פתרון.
- אם  $D$  אינו שלילי אז פתרונות המשוואה נתונים על ידי הנוסחה 
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- אם  $D = 0$  אז יש למשוואה פתרון אחד ויחיד:  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- אם  $D$  מספר חיובי אז יש למשוואה שני פתרונות שונים זה מזה:  $x_1 \neq x_2$

משמעות המילה דיסקרימיננטה היא ביטוי המאפשר להבחין (Discriminate) בין המקרים השונים. אכן, מהתבוננות בביטוי זה ניתן לקבוע אם למשוואה אין פתרונות, יש פתרון אחד, או יש שני פתרונות שונים.

## שאלה 21

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת נוסחת השורשים:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } x^2 + 10x + 9 = 0 & \text{ב. } 5x^2 - 9x - 4 = 0 & \text{ג. } x^2 - x - 1 = 0 \\ \text{ד. } 9x^2 + 30x + 25 = 0 & \text{ה. } x^2 + 6x + 10 = 0 & \end{array}$$

התשובה בעמוד 229

## שאלה 22

א. מצאו מספר  $a$  כך שלמשוואה  $3x^2 + 7x = a$  יש פתרון אחד ויחיד.  
 ב. מצאו עבור אילו ערכים של  $a$  יש למשוואה  $5x^2 + (2-a)x + a = 0$  פתרון אחד ויחיד.

התשובה בעמוד 230

בשאלה הבאה נפגוש משוואות ריבועיות ב'תחפוזות' שונות. היעזרו בנוסחת השורשים כדי לפתור.

## שאלה 23

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x + \frac{1}{x} = 5 & \text{ב. } x(x+3) = 12 \\ \text{ג. } \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2} & \text{ד. } (x+1)^3 = x(x+3)(x+4) \\ \text{ה. } (2x+1)(3x+5) = x^2 - 3 & \text{ו. } \frac{3x+1}{4-x} = \frac{9x-3}{x+2} \end{array}$$

התשובה בעמוד 231

## מסקנות מנוסחת השורשים

נתבונן במשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  ונניח שהדיסקרימיננטה  $D = b^2 - 4ac$  אינה שלילית. לפי נוסחת השורשים, שורשי המשוואה הם:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

נחשב את סכום השורשים:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

נחשב את מכפלת השורשים:

$$\begin{aligned}x_1 x_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{D})(-b - \sqrt{D})}{4a^2} \\&= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

קיבלנו את הנוסחאות:

נוסחאות אלה נקראות **נוסחאות וייטה** על שם המתמטיקאי הצרפתי פרנסואה וייטה (François Viète, 1540-1603).

לדוגמה: נתבונן במשוואה

$$5x^2 + 2x - 6 = 0$$

הדיסקרימיננטה של המשוואה,  $D = 2^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6$ , היא חיובית, ולכן יש לה שני פתרונות שונים. מבלי לחשב את הפתרונות, ניתן לקבוע כי סכומם הוא  $-2/5$ , ומכפלתם היא  $-6/5$ .

נתבונן עתה בביטוי  $(x - x_1)(x - x_2)$ . אם נפתח סוגריים בביטוי זה, נקבל את הזהות הבאה:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - x_1 \cdot x - x \cdot x_2 + x_1 x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \\&= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\end{aligned}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

נכפיל ב־ $a$  ונקבל:

זהות זו מאפשרת לפרק לגורמים לינאריים כל ביטוי ריבועי, שעבורו קיימים פתרונות למשוואה הריבועית המתאימה.

בכך נסגר המעגל: בעבר ראינו (עמוד 113) כיצד ניתן לפתור משוואה ריבועית, אם הצלחנו לפרק לגורמים לינאריים את הביטוי הריבועי המתאים; כעת למדנו כיצד ניתן לפרק ביטוי ריבועי לגורמים לינאריים, בעזרת פתרונות המשוואה הריבועית המתאימה.

לדוגמה, נפרק לגורמים את הביטוי הבא:

$$12x^2 + 17x - 5$$

לצורך כך נחשב את פתרונות המשוואה  $12x^2 + 17x - 5 = 0$ , לפי נוסחת השורשים:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 12 \cdot 5}}{24} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 12 \cdot 5}}{24} \\&= \frac{-17 \pm \sqrt{529}}{24} = \frac{-17 \pm 23}{24}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-17+23}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{-17-23}{24} = -\frac{40}{24} = -\frac{5}{3} \quad \text{לכן:}$$

מהזהות  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  נקבל:

$$\begin{aligned} 12x^2 + 17x - 5 &= 12(x - x_1)(x - x_2) = 12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right) \\ &= 4\left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot 3\left(x + \frac{5}{3}\right) = (4x - 1)(3x + 5) \end{aligned}$$

קיבלנו אפוא את הזהות  $12x^2 + 17x - 5 = (4x - 1)(3x + 5)$ , ובכך פירקנו את הביטוי  $12x^2 + 17x - 5$  לגורמים.

## שאלה 24

פרקו לגורמים את הביטויים הבאים:

התשובה בעמוד 233

א.  $2x^2 - x - 15$       ב.  $6x^2 + 13x - 8$       ג.  $14 - 5x - x^2$

## סיכום שיטות הפתרון למשוואות ריבועיות

למדנו שלוש דרכים לפתרון משוואות ריבועיות: בשיטת הפירוק, בשיטת ההשלמה לריבוע, ובעזרת נוסחת השורשים. יתרונה של נוסחת השורשים הוא בקביעת פתרונות המשוואה ללא שלבי ביניים, וביכולת לקבוע במהירות את מספר הפתרונות של המשוואה. בשל שימושיותה, מומלץ לזכור את נוסחת השורשים בעל פה, לצד ההבנה שמקור הנוסחה הוא בשיטת ההשלמה לריבוע.

## משוואות בשני נעלמים: שיטת החילוף וההצבה

נעבור ללמוד על דרכים לפתרון משוואות בשני נעלמים. בדרך כלל (אך לא תמיד) נסמן את הנעלמים ב- $x$  ו- $y$ .

בתחילת השיעור נתקלנו במערכת פשוטה של שתי משוואות בשני נעלמים, אשר התקבלה מתוך בעיה מחיי היומיום:

$$\begin{cases} D + S = 600 \\ S = 3D \end{cases}$$

השיטה שבה פתרנו את המערכת היתה הצבת הערך של  $S$ , המבוטא במשוואה השנייה בעזרת המשתנה  $D$ , בתוך המשוואה הראשונה. כך התקבלה משוואה במשתנה  $S$  בלבד:

$$D + 3D = 600$$

פתרנו משוואה זו ללא קושי, וקיבלנו את ערכו של  $D$ . לאחר מכן הצבנו את ערכו של  $D$  במשוואה  $S = 3D$ , וקיבלנו את ערכו של  $S$ .

בדרך כלל לא נקבל מן המוכן משוואה המבטאת את אחד הנעלמים באמצעות נעלם אחר. אך לעתים נוכל לבצע פעולות על המשוואות כדי להגיע למשוואה מסוג זה. במצב זה, נציב את הביטוי שקיבלנו עבור אחד הנעלמים באחת המשוואות המקוריות, וכך נקבל משוואה במשתנה אחד, שאותה נפתור בכלים שכבר הכרנו. לאחר מכן ניעזר בערך זה למציאת ערך הנעלם הנותר. שיטה זו נקראת **חילוף והצבה**.

נבהיר את הדברים בדוגמאות הבאות:

א. נתבונן במערכת

$$\begin{cases} 3x + 5y = 31 \\ 4x + 7y = 42 \end{cases}$$

מן המשוואה הראשונה שבמערכת, נחלץ את  $x$ :

$$3x + 5y = 31 \Rightarrow 3x = 31 - 5y \Rightarrow x = \frac{31 - 5y}{3}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{31 - 5y}{3} + 7y = 42 \quad \text{נציב ביטוי זה במשוואה השנייה:}$$

קיבלנו משוואה במשתנה  $y$ , וכעת נפתור אותה.

$$\Rightarrow 4 \cdot (31 - 5y) + 21y = 126 \quad \text{נכפיל את שני האגפים ב-3:}$$

$$\Rightarrow 124 - 20y + 21y = 126 \quad \text{נפתח את הסוגריים:}$$

$$\Rightarrow 124 + y = 126 \quad \text{נכנס איברים דומים:}$$

$$\Rightarrow y = 2 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Rightarrow x = \frac{31 - 5 \cdot 2}{3} = 7 \quad \text{כעת נציב } y = 2 \text{ במשוואה } x = (31 - 5y)/3:$$

קיבלנו אפוא שממערכת המשוואות מתחייב ש-  $x = 7, y = 2$ .

מכיוון שעברנו שרשרת של גרירות לוגיות, עלינו לוודא ש-  $x = 2, y = 7$  באמת פותרים את מערכת המשוואות. ואכן:

$$\begin{cases} 3 \cdot 7 + 5 \cdot 2 = 21 + 10 = 31 \\ 4 \cdot 7 + 7 \cdot 2 = 28 + 14 = 42 \end{cases}$$

לסיכום: צמד הערכים  $x = 7, y = 2$  הוא הפתרון היחיד של מערכת המשוואות.

ב. נתבונן במערכת

$$\begin{cases} x(y+1) = 12 \\ y(x+1) = 15 \end{cases}$$

כדי לפתור את המערכת, נחלץ את  $x$  מהמשוואה הראשונה:

$$\Rightarrow x = \frac{12}{y+1}$$

(ניתן לחלק ב- $y+1$  כי מהמשוואה הראשונה נובע ש- $y+1 \neq 0$ )

נציב ביטוי זה במשוואה השנייה:

$$\Rightarrow y\left(\frac{12}{y+1} + 1\right) = 15$$

קיבלנו משוואה בנעלם  $y$ . כדי לפתור, נכפול ב- $y+1$ :

$$\Rightarrow y(12 + y + 1) = 15(y + 1)$$

לאחר העברת אגפים וכינוס איברים דומים נקבל את המשוואה הריבועית:

$$\Rightarrow y^2 - 2y - 15 = 0$$

לפי נוסחת השורשים, הפתרונות האפשריים הם

$$\frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4$$

כלומר  $y = 5$  או  $y = -3$ .

נבדוק כל אחד מהמקרים:

אם  $y = 5$  אז (לפי המשוואה  $x = 12/(y+1)$ ),  $x = 2$ .

אם  $y = -3$  אז (לפי אותה משוואה),  $x = 12/(-2) = -6$ .

קיבלנו אפוא שני פתרונות אפשריים: הצמד  $x = 2, y = 5$  והצמד  $x = -6, y = -3$ .

נבדוק כל אפשרות:

$$\begin{cases} 2 \cdot (5 + 1) = 12 \\ 5 \cdot (2 + 1) = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} (-6) \cdot ((-3) + 1) = 12 \\ (-3) \cdot ((-6) + 1) = 15 \end{cases}$$

בשני המקרים, הערכים שנמצאו הם אכן פתרונות למערכת המשוואות. ומהניתוח שערכנו נובע שאלה הם כל הפתרונות.

בדומה לפתרון משוואות במשתנה אחד, גם במערכות של משוואות בשני נעלמים ניתן במקרים מסוימים לערוך סדרה של היקשי שקילות (אם ורק אם), וכך לחסוך את הצורך בבדיקת נכונות הפתרונות שהתקבלו. השקילות במקרה זה לא תהיה בין משוואות בודדות, אלא בין מערכות של משוואות.

כדי להדגים זאת, נפתור שוב את מערכת המשוואות שבדוגמה האחרונה, והפעם עם היקשי שקילות:

$$\begin{cases} x(y+1) = 12 \\ y(x+1) = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{y+1} \\ y(x+1) = 15 \end{cases} \quad (\text{חלוקת המשוואה העליונה ב-} y+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{y+1} \\ y\left(\frac{12}{y+1} + 1\right) = 15 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\text{הצבת הביטוי ל-} x \text{ מהמשוואה העליונה} \\ \text{במשוואה התחתונה}) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{y+1} \\ y^2 - 2y - 15 = 0 \end{cases} \quad (\text{פישוט המשוואה התחתונה})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{y+1} \\ y = -3 \text{ או } y = 5 \end{cases} \quad (\text{פתרון המשוואה הריבועית})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \quad (\text{הצבה במשוואה העליונה})$$

תוכלו לוודא שכל היקש הוא אכן שקילות, כלומר – כל מערכת משוואות נובעת מזו שהיתה לפניה, וגם ניתן להקיש ממנה בחזרה את המערכת שהיתה לפניה.

## שאלה 25

פתרו את מערכות המשוואות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ 5x - 6y = -3 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} \frac{2x}{3} = \frac{5y}{2} + 4 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ג.} & \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \\ \text{ד.} & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y-1} = \frac{5}{2} \\ xy = -\frac{5}{6} \end{cases} \end{array}$$



## שיטת האלימינציה

השיטה שנציג כעת, כוחה יפה למערכות של משוואות, שכל אחת מהן מהצורה הבאה:

$$ax + by = c$$

משוואה כזו נקראת **משוואה לינארית בשני נעלמים**.

רעיון השיטה הוא ביצוע פעולות אלגבריות על המשוואות הנתונות, כדי להגיע למשוואה שבה לא משתתף אחד הנעלמים. הפעולה של הדרת אחד הנעלמים נקראת **אלימינציה**.

◁ באנגלית, elimination = הסרה, העלמה.

נדגים את הדברים במערכת הלינארית הבאה:

$$\begin{cases} 12x + 5y = 10 \\ 8x + 3y = 3 \end{cases}$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב-3, ואת המשוואה השנייה ב-5:

$$\begin{cases} 36x + 15y = 30 \\ 40x + 15y = 15 \end{cases}$$

בשתי המשוואות שהתקבלו, המקדם של  $y$  זהה. כעת נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$4x = -15$$

$$x = -\frac{15}{4} = -3\frac{3}{4} \quad \text{מכאן נקבע ערכו של } x$$

כדי לקבל את ערכו של  $y$ , נכפיל את המשוואה הקודמת ב-2:

$$8x = -30$$

נפחית משוואה זו מהמשוואה השנייה שבמערכת המקורית ( $8x + 3y = 3$ ):

$$3y = 33$$

$$y = 11 \quad \text{מכאן,}$$

נוודא שאכן ערכים אלה פותרים את מערכת המשוואות:

$$12 \cdot \frac{-15}{4} + 5 \cdot 11 = 55 - 45 = 10$$

$$8 \cdot \frac{-15}{4} + 3 \cdot 11 = 33 - 30 = 3$$

אכן, ערכים אלה מקיימים את המערכת.

ניתן לפתור מערכת זו גם בשרשרת של שקילויות:

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 12x + 5y = 10 \\ 8x + 3y = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 36x + 15y = 30 \\ 40x + 15y = 15 \end{cases} && \begin{array}{l} \text{(הכפלת המשוואה העליונה ב-3,} \\ \text{והמשוואה התחתונה ב-5)} \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -15 \\ 40x + 15y = 15 \end{cases} && \begin{array}{l} \text{(חיסור המשוואה העליונה מהתחתונה,} \\ \text{וכתיבת התוצאה בשורה העליונה)} \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 40x = -150 \\ 40x + 15y = 15 \end{cases} && \text{(הכפלת המשוואה העליונה ב-10)} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 40x = -150 \\ 15y = 165 \end{cases} && \begin{array}{l} \text{(חיסור המשוואה העליונה מהתחתונה,} \\ \text{וכתיבת התוצאה בשורה התחתונה)} \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{4} \\ y = 11 \end{cases} && \begin{array}{l} \text{(חלוקת המשוואה העליונה ב-40,} \\ \text{והמשוואה התחתונה ב-15)} \end{array}
 \end{aligned}$$

ניתן לוודא כי כל אחד מהמעברים הוא שקילות. לדוגמה, במעבר השני,

$$\begin{cases} 36x + 15y = 30 \\ 40x + 15y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -15 \\ 40x + 15y = 15 \end{cases}$$

כל אחת מהמערכות הנ"ל מתקבלת מזולתה על ידי חיסור המשוואה העליונה מהמשוואה התחתונה, וכתיבת התוצאה בשורה העליונה.

לסיכום, שיטת האלימינציה היא חלופה לשיטת החילוף וההצבה בפתרון של משוואות לינאריות. בדרך כלל שיטה זו מצריכה פחות שימוש בשברים מאשר שיטת החילוף וההצבה, ולכן היא נוחה יותר לשימוש.

קיימת שיטה כללית לפתרון מערכות של משוואות לינאריות במספר כלשהו של נעלמים. שיטה זו נקראת **שיטת האלימינציה של גאוס**, על שמו של קארל פרידריך גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), אחד מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים. המקרה שלמדנו, של שתי משוואות בשני נעלמים, הוא הדגמה בזעיר אנפין של שיטה זו. תוכלו ללמוד על השיטה הכללית בקורס 'אלגברה לינארית 1'.

## שאלה 26

פתרו בשיטת האלימינציה:

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = 25 \end{cases} \\
 \text{ב.} & \begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ 7x + 3y = 4 \end{cases} \\
 \text{ג.} & \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 9y = 8 \end{cases}
 \end{array}$$

## שאלה 27

הוכיחו כי למערכת המשוואות הבאה יש אינסוף פתרונות:

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 9y = 9 \end{cases}$$

התשובה בעמוד 237

הדרכה: הוכיחו שלכל ערך  $x$  שנבחר, ניתן למצוא ערך  $y$  שעבורו יתקיימו שתי המשוואות.

## הצגת משתנה חדש בפתרון משוואות

יש מצבים שבהם ניתן להציג משתנים חדשים ולקבל משוואות פשוטות יותר.

נתבונן, למשל, במערכת המשוואות הבאה:

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8 \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

הנעלמים במשוואה זו הם  $x$  ו- $y$ , אך למעשה כל המשוואות מבוטאות באמצעות  $x^2$  ו- $y^2$ .

$$s = x^2$$

$$t = y^2$$

לכן אם נגדיר:

תקבל מערכת המשוואות את הצורה

$$(2) \quad \begin{cases} s + 2t = 8 \\ 2s - t = 1 \end{cases}$$

במערכת זו,  $s$  ו- $t$  הם נעלמים, כי הם הוגדרו לפי ערכם של  $x$  ו- $y$ , וערכים אלה לא ידועים לנו. המשוואות במערכת הן משוואות לינאריות. נפתור אותן:

נכפול את המשוואה התחתונה של המערכת (2) ב-2:

$$4s - 2t = 2$$

נחבר משוואה זו למשוואה העליונה של המערכת (2):

$$5s = 10$$

$$s = 2$$

מכאן נקבל

$$2t = 6$$

נחסר משוואה זו מהמשוואה העליונה של המערכת (2):

$$t = 3$$

ולכן

קיבלנו את הפתרון  $s = 2, t = 3$  והוא אכן פותר את המערכת (2):

$$\begin{cases} 2 + 2 \cdot 3 = 8 \\ 2 \cdot 2 - 3 = 1 \end{cases}$$

פתרנו את מערכת המשוואות (2), אך עדיין לא פתרנו את המערכת המקורית (1).

כדי למצוא את ערכם של הנעלמים המקוריים, עלינו לפתור את המשוואות:

$$\begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 3 \end{cases}$$

לפי טענה 3.5, הפתרון למשוואה  $x^2 = 2$  הוא  $x = \pm\sqrt{2}$ , והפתרון למשוואה  $y^2 = 3$  הוא

$y = \pm\sqrt{3}$ . מכאן מתקבל שיש בדיוק 4 פתרונות למשוואות המקוריות:

א.  $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$

ב.  $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{3}$

ג.  $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{3}$

ד.  $x = -\sqrt{2}, y = -\sqrt{3}$

באופן כללי ניתן לנסח כך את שלבי השיטה:

א. הגדרת משתנים חדשים.

ב. ביטוי המשוואות שבמערכת באמצעות המשתנים החדשים.

ג. פתרון המשוואות שהתקבלו.

ד. מציאת ערכי המשתנים המקוריים לפי ערכי המשתנים החדשים.

יישומה המוצלח של השיטה טמון בזיהוי מצבים שבהם ניתן להגדיר משתנים חדשים שאכן יאפשרו ביטוי המשוואות באמצעותם, ושיובילו למשוואות מצורה פשוטה יותר מהמשוואות המקוריות.

כדוגמה נוספת, נתבונן במשוואה

$$x^4 - 2x^2 = 3$$

◁ לפי חוקי החזקות (ראו שיעור 2):

$$(x^2)^2 = x^{2 \cdot 2} = x^4$$

$$(x^2)^2 - 2x^2 = 3$$

ניתן להציג משוואה זו כך:

$$t = x^2$$

לכן, אם נגדיר את המשתנה

$$t^2 - 2t = 3$$

תקבל המשוואה את הצורה הבאה:

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

קיבלנו אפוא משוואה ריבועית:

$$(t + 1)(t - 3) = 0$$

נפתור משוואה זו בשיטת הפירוק:

◁ ניתן, כמובן, לפתור גם בעזרת נוסחת השורשים או בשיטת ההשלמה לריבוע.

פתרונות המשוואה הם  $t = -1$  ו-  $t = 3$ . נבדוק את משמעותו של כל פתרון לגבי הנעלם במשוואה המקורית,  $x$ :

• אם  $t = -1$  אז ורק אם  $x^2 = -1$ . מקרה זה לא ייתכן, כי לפי חוקי הסימנים, ריבוע של מספר אינו יכול להיות מספר שלילי.

• אם  $t = 3$  אז ורק אם  $x^2 = 3$ . לפי טענה 3.5, שוויון זה שקול לכך ש-  $x = \sqrt{3}$  או  $x = -\sqrt{3}$ .

מצאנו אפוא את פתרונות המשוואה המקורית:  $x = \sqrt{3}$  או  $x = -\sqrt{3}$ .

בשיטה שבה פתרנו את המשוואה האחרונה, ניתן לפתור כל משוואה מהצורה  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ . משוואה כזו נקראת **משוואה דו-ריבועית**.

## שאלה 28

פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$

ב.  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

ג. 
$$\begin{cases} 5x = \frac{2}{y} + 3 \\ \frac{4}{y} = 8 + 3x \end{cases}$$

ד. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 4 \end{cases}$$

התשובה בעמוד 238

## שאלה 29

פתרו את המשוואה:  $x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1 = 0$ .

הדרכה: חלקו את המשוואה ב- $x^2$  והיעזרו בהצבה  $t = x + 1/x$ .

הערה: בדרך זו ניתן לפתור כל משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ .

התשובה בעמוד 240

## משוואות ממעלה גבוהה מ-2 (סקירה היסטורית)

בשיעור זה למדנו לפתור משוואות לינאריות במשתנה אחד, הנקראות גם משוואות ממעלה ראשונה. כל משוואה כזו ניתנת לכתיבה בצורה

$$ax + b = 0$$

במשוואה זו ובמשוואות הבאות נניח כי  $a \neq 0$ .

$$x = -\frac{b}{a}$$

ופתרונה האחד והיחיד הוא

לאחר מכן למדנו לפתור משוואות ריבועיות, הנקראות גם משוואות ממעלה שנייה. הצורה הכללית של המשוואה הריבועית היא

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ונוסחת הפתרון היא:

טבעי לשאול אם קיימות נוסחאות פתרון למשוואות ממעלה גבוהה יותר, וביתר פירוט:

- למשוואות ממעלה שלישית – כלומר משוואות מהצורה

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- למשוואות ממעלה רביעית – כלומר משוואות מהצורה

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c = 0$$

- למשוואות ממעלה חמישית, שישית, וכן הלאה.

מסתבר כי ישנן נוסחאות לפתרון משוואות ממעלה שלישית ורביעית. נוסחאות אלה התגלו על ידי מתמטיקאים איטלקים במאה ה-16: הנוסחה לפתרון משוואה ממעלה שלישית התגלתה על ידי שיפיונה דל פרו (Scipione del Ferro, 1465-1526) והנוסחה לפתרון משוואה ממעלה רביעית התגלתה על ידי לודוביקו פרארי (Lodovico Ferrari, 1522-1565). שתי

הנוסחאות פורסמו לראשונה בספרו של ג'ורלאמו קרדאנו (Girolamo Cardano, 1501-1576) שנקרא 'האמנות הגדולה' (Ars Magna). נוסחאות אלה סבוכות מאוד ולכן לא נדון בהן בקורס זה.

לאחר גילוי נוסחאות אלה, פנו המתמטיקאים לחפש נוסחה כללית למשוואות ממעלה חמישית. נסיונות אלה עלו בתוהו, ולבסוף עלה בידי המתמטיקאים פאולו רופיני (Paolo Ruffini, 1765-1822), נילס הנריק אבל (Niels Henrik Abel, 1802-1829) ואבריסט גלואה (Évariste Galois, 1811-1832) להוכיח שאין בנמצא נוסחה כזו (המשתמשת בארבע פעולות החשבון ובפעולת הוצאת השורש מסדר כלשהו). כל אחד מהם פעל בנפרד ובזמן שונה והוסיף נדבכים חשובים להבנת תופעה זו והוכחתה. עבודות אלה, ובמיוחד עבודתו של גלואה, פתחו אופקים חדשים למתמטיקה, והן הבסיס של האלגברה המודרנית.

סיפור הגילוי של נוסחאות הפתרון למשוואות ממעלה שלישית ורביעית ודרך פרסומן, וסיפור התגלית על אי־קיום פתרון כללי למשוואות ממעלה חמישית או יותר, וסיפוריהם האישיים של המתמטיקאים שעמדו מאחורי תגליות אלה, הם כמה מהפרקים המרתקים ביותר בהיסטוריה של המתמטיקה, ומומלץ מאוד לקרוא עליהם.

### סיכום שיעור 3

בשיעור זה למדנו על מושג המשוואה, והכרנו סוגים שונים של משוואות וכלים שונים לפתרון. למדנו את כללי ההיסק הבסיסיים בפתרון משוואות, ודרכים לפתרון משוואות לינאריות וריבועיות במשתנה אחד ובשני משתנים. ראינו כמה דוגמאות ליישום של משוואות בפתרון בעיות מחיי היומיום. למדנו להבחין בין גרירה חד־כיוונית (שניכרת בדרך כלל בביטויים "אם... אז...", "לכן..." או בסימון " $\Rightarrow$ ") לבין גרירה דו־כיוונית (שניכרת ב"אם ורק אם", "שקילות", או " $\Leftrightarrow$ ") ובהשלכותיהן על פתרון משוואות. הבחנה זו נוגעת בלוגיקה המתמטית שהיא חלק מכל הוכחה ופתרון של בעיה.

הטכניקה שלמדנו היא פרי הבשלה של מאות ואלפי שנות מחשבה אנושית. כל אחד מהרעיונות שטמונים בה, דוגמת השימוש באפס, במספרים השליליים, ובסימון של אותיות עבור ערך של נעלמים וקבועים, היה פריצת דרך עצומה בשעתו, ולקח לו זמן להתקבל בקרב קהילת המלומדים המצומצמת, ובהמשך בשכבות נרחבות יותר. למרבה המזל, הרעיונות המוצלחים ביותר ניחנו בפשטות ואלגנטיות שמקלות על הבנתם והפיכתם לתצרך שלם, העולה על סכום חלקיו, ומהווה נדבך לפריצות הדרך שבאות בעקבותיו. בלימוד המתמטיקה בקורס זה אנו לוקחים חלק במסע היסטורי מהיר בין תקופות, מוחות מזהירים ורעיונות גדולים.

## שאלות להערכה עצמית

### שאלה 30

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \frac{3x}{4x+2} = 10$$

$$\text{ב. } 8x - \frac{2x}{3} = \frac{4x+1}{8}$$

$$\text{ג. } x^2 = 5x + 1$$

$$\text{ד. } \frac{8x+1}{2x+2} = \frac{1-x}{3-x}$$

$$\text{ה. } (x^2 - x - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$\text{ו. } x = 5 + \sqrt{x}$$

$$\text{ז. } x = (2x - 1)^2$$

$$\text{ח. } \frac{1}{3 + \frac{5}{x}} + \frac{x}{3 + \frac{x}{5}} = 2$$

התשובה בעמוד 240

### שאלה 31

פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 9x + 12y = -5 \end{cases}$$

$$\text{ב. } \begin{cases} xy = x + y + 2 \\ 2x = 3y + 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \\ xy = 10 \end{cases}$$

$$\text{ד. } \begin{cases} xy^2 = 5 + x \\ x + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} x^2y + xy^2 = xy \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

התשובה בעמוד 243

### שאלה 32

מכפלת גיליהם של יוסי (האח הבכור) ואריאל (האח הצעיר) היא 75. בעוד שנתיים תהיה מכפלת גיליהם 114. בני כמה הם?

התשובה בעמוד 246

### שאלה 33

יוחאי גדול בשנתיים מאסף, ואסף גדול בשנה מענת. בעוד שנתיים תהיה מכפלת גיליהם גדולה ב־40 ממכפלת גיליהם היום. בני כמה הם?

התשובה בעמוד 247

### שאלה 34

בחשבון בנק עם ריבית חודשית קבועה הופקדו 1000 שקלים. כעבור חודש הופקדו 500 שקלים נוספים. לאחר חודשיים יתרת החשבון היתה 1600 שקלים. מה היה שיעור הריבית החודשית?

התשובה בעמוד 247

## שאלה 35

נהג יצא לנסיעה של 100 ק"מ בשעה 8:00. בחצי הדרך הגביר את מהירותו ב־10 קמ"ש. הנהג הגיע ליעדו בשעה 8:55. מה היתה מהירות הנהג בכל שלב בנסיעה?

התשובה בעמוד 248

## שאלה 36

**חידת דיופנטוס.** דיופנטוס היה מתמטיקאי הלניסטי שחי באלכסנדריה במאה ה־3 לספירה. תלמידו מטרודורוס חיבר את החידה הבאה, שהיא מעין כתב מצבה: (תרגום: אלי בר יהלום)

כאן ישן דיופנטוס לעד את שנתו.

רק שישית מחייו נמשכה ילדותו.

עוד חייו חלקי שתיים־עשרה – צץ לו זקן;

עוד שביעית מחייו – והנה הוא חתן.

עוד חמש שנות חיים – ונולד לו הבן:

חי פי שנים פחות מאביו, המסכן!

הזדקן החכם בארבע שנות השכול

אחרי מות הבן – וירד אל השאול

עובר־אורח! כבדהו לפי תורתו

וחשב: בן כמה הוא היה במותו?

התשובה בעמוד 249

פתרו את חידת דיופנטוס.





## שיעור 4

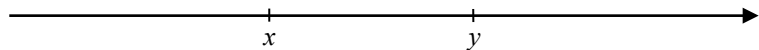
# אי־שוויונות

אחד המאפיינים החשובים של מערכת המספרים הממשיים הוא **יחס הסדר**, שמשמעותו היא היכולת להשוות בין שני מספרים ולקבוע איזה מהם הגדול ואיזה הקטן.

כולנו יודעים, למשל, ש-9 גדול יותר מ-5. ניתן להסביר עובדה זו כך: 9 נמצא מאוחר יותר מ-5 בסדר הספירה –

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

כללית יותר, אם נרצה להשוות בין שני מספרים (שאינם בהכרח מספרים שלמים), נוכל להתבונן במיקומם על פני ציר המספרים הממשיים. כמקובל אנו מציירים את ציר הממשיים במאוזן, כשהכיוון החיובי הוא ימינה.



נאמר כי המספר  $x$  קטן מהמספר  $y$  אם הנקודה המתאימה ל- $x$  על פני ציר המספרים נמצאת משמאל לנקודה המתאימה ל- $y$ . נסמן היגד זה כך:

$$x < y$$

$$y > x$$

כמובן, במצב זה נאמר גם ש- $y$  גדול מ- $x$ , ונסמן: כל הסימונים וההיגדים הללו שקולים זה לזה.

### שאלה 1

הציגו את המספרים הבאים על פני ציר המספרים הממשיים, וסדרו אותם מהקטן לגדול:

0.6, 2, 1.3, -3, -2/3

במצב שבו  $x > y$  או  $x = y$  נאמר כי  $x$  **גדול או שווה ל-**  $y$ , ונסמן זאת כך:  $x \geq y$ .

במצב שבו  $x < y$  או  $x = y$  נאמר כי  $x$  **קטן או שווה ל-**  $y$ , ונסמן זאת כך:  $x \leq y$ .

טענה מהסוג " $x > y$ " או " $x < y$ " נקראת **אי־שוויון חזק**.

טענה מהסוג " $x \geq y$ " או " $x \leq y$ " נקראת **אי־שוויון חלש**.

כל טענה מסוגים אלה נקראת **אי־שוויון**.

מושגים אלה קשורים למושגים 'חיובי' ו'שלילי' שהכרנו בעבר. מספר  $x$  הוא:

- **חיובי** אם  $x > 0$ .
- **אי-שלילי** אם  $x \geq 0$ .
- **שלילי** אם  $x < 0$ .

## שאלה 2

לגבי כל אחת מהטענות, קבעו "נכון" או "לא נכון".

א.  $2 < 2$  ב.  $3 < 5$  ג.  $2 \leq 2$  ד.  $2 \leq 3$  ה.  $2 < -3$  ו.  $1/2 < 1/3$

התשובה בעמוד 250

בשיעור זה נכיר את התכונות היסודיות של יחס הסדר. היכרות זו תאפשר לנו לבצע שתי משימות בסיסיות:

א. להוכיח אי-שוויונות: להראות שאי-שוויון מסוים בין שתי תבניות מספר מתקיים תמיד (כלומר עבור כל הצבה של המשתנים המופיעים בהן), או בהגבלות מסוימות על ערכי המשתנים.

לדוגמה, האי-שוויון הבא מתקיים לכל  $x$  ממשי:  $x^2 \geq 0$   
משימה זו דומה למשימת הוכחת הזהויות שהכרנו בשיעור השני.

ב. לפתור אי-שוויונות: למצוא את קבוצת הערכים של הנעלמים, שבהם מתקיים אי-שוויון נתון בין שתי תבניות מספר.

לדוגמה, האי-שוויון  $x^2 < 1$

אינו מתקיים עבור כל ערך של  $x$ : הוא מתקיים, למשל, עבור  $x = 1/2$ , ואינו מתקיים עבור  $x = 2$ . מאחר יותר נוכיח, שאי-שוויון זה מתקיים אם ורק אם  $x$  נמצא בטווח שבין  $-1$  ל- $1$ , לא כולל הקצוות. תנאי זה יבוטא כך:  $-1 < x < 1$ .

משימת פתרון האי-שוויונות דומה למשימת פתרון המשוואות, שהכרנו בשיעור הקודם. אך בניגוד למשוואות, שלהן יש לעתים קרובות פתרון יחיד, או מספר סופי של פתרונות, באי-שוויונות המקרה הנפוץ הוא שקבוצת הפתרונות היא אינסופית. לכן שומה עלינו להכיר את השפה ואת הכללים לתיאור קבוצות.

## קבוצות

המושג 'קבוצה' הוא המושג הבסיסי ביותר במתמטיקה, ומשמעותו היא – אוסף של איברים. איברים אלה יכולים להיות מספרים (ובקורס שלנו זה יהיה בדרך כלל המצב), אך הם יכולים להיות גם כל דבר אחר.

ניתן, למשל, לדבר על קבוצת כל האותיות בשפה העברית, קבוצת כל האנשים החיים בעולם ברגע זה, קבוצת חברי הכנסת הנוכחית, וכן הלאה.

בדרך כלל נסמן קבוצות באותיות לטיניות גדולות –  $A, B, C, \dots$ , ואיברים של קבוצות באותיות לטיניות קטנות –  $a, b, c, \dots$ .

אם  $a$  איבר של קבוצה  $A$ , נסמן זאת בסימון  $a \in A$  ונאמר ש- $a$  שייך ל- $A$ .  
אם  $a$  אינו איבר של הקבוצה  $A$ , נסמן זאת בסימון  $a \notin A$  ונאמר ש- $a$  לא שייך ל- $A$ .

ניתן לתאר קבוצה על ידי כתיבת רשימת האיברים שבה בתוך סוגריים מסולסלים, הנקראים צומדיים:  $\{ \}$ . לדוגמה:

- $\{1, 2, 3\}$  היא קבוצה שאיבריה הם המספרים 1, 2 ו-3.  
מתקיים אפוא:  $1 \in \{1, 2, 3\}$  וגם  $2 \in \{1, 2, 3\}$  וגם  $3 \in \{1, 2, 3\}$ .  
מאידך,  $7 \notin \{1, 2, 3\}$ .
- $\{א, ב, ג, ד, ה, ו, ז, ח, ט, י, כ, ל, מ, נ, ס, ע, פ, צ, ק, ר, ש, ת\}$  היא קבוצת האותיות באלפבית העברי.

אין חשיבות לסדר שבו נרשום את איברי הקבוצה: את הקבוצה  $\{2, 5, 6\}$  נוכל לרשום באופן שקול גם בצורה  $\{6, 2, 5\}$  או  $\{5, 2, 6\}$ . כמו כן, אין חשיבות למספר הפעמים שאיבר מסוים חוזר ברשימה: כל איבר נספר פעם אחת. למשל, הקבוצות  $\{1, 2, 3\}$  ו- $\{1, 2, 2, 3, 3\}$  שוות זו לזו, ובשתיהן יש שלושה איברים – 1, 2 ו-3.

בלימודינו עד כה נתקלנו בכמה קבוצות של מספרים:

- **קבוצת המספרים הטבעיים.** קבוצה זו מסומנת באות  $\mathbb{N}$  (קיצור של המונח האנגלי Natural numbers = מספרים טבעיים):  
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- **קבוצת המספרים השלמים.** קבוצה זו מסומנת באות  $\mathbb{Z}$  (קיצור של המילה הגרמנית Zahlen = מספרים):  
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- **קבוצת המספרים הרציונליים** (כזכור מספר נקרא רציונלי אם הוא ניתן לביטוי כמנה  $a/b$ , שבה  $a$  ו- $b$  הם מספרים שלמים, ו- $b \neq 0$ ). קבוצה זו מסומנת באות  $\mathbb{Q}$  (קיצור של המילה האנגלית Quotient = מנה).
- **קבוצת המספרים הממשיים.** קבוצה זו מסומנת באות  $\mathbb{R}$  (קיצור של המונח האנגלי Real numbers = מספרים ממשיים).

בהתאם לסימונים אלה, במקום לכתוב " $x$  הוא מספר ממשי" נוכל לכתוב:  $x \in \mathbb{R}$ . במקום לכתוב " $x$  הוא מספר טבעי" נוכל לכתוב:  $x \in \mathbb{N}$ , וכן הלאה.

### שאלה 3

בדקו אם מתקיימות הטענות הבאות:

- א.  $2 \in \mathbb{N}$       ב.  $8/3 \in \mathbb{Z}$       ג.  $-27/9 \in \mathbb{Z}$   
 ד.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$       ה.  $1 \in \{2, 3\}$

התשובה בעמוד 250

דרך נוספת לתיאור קבוצה היא כתיבת מכלול ה**תכונות** שאיבר בקבוצה צריך לקיים. צורת הכתיב, הנקראת משמאל לימין, היא

$$\{ \text{רשימת תנאים} \mid \text{ביטוי} \}$$

הקו האנכי  $\mid$  משמעותו "כך ש-".

לדוגמה, הקבוצה  $\{n \mid n \in \mathbb{N}, n > 3\}$

היא קבוצת כל ה- $n$  ש- $n$  מספר טבעי וגם  $n > 3$ .

קבוצה זו היא למעשה הקבוצה  $\{4, 5, 6, \dots\}$

כדוגמה נוספת, נוכל לבטא את קבוצת המספרים הרציונליים כך:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

דרך נוספת לתיאור קבוצות, הדומה לדרך הקודמת שהכרנו, היא כתיבה מראש מהי הקבוצה הכללית ממנה נלקחים איברי הקבוצה המתוארת. למשל, את הקבוצה  $\{4, 5, 6, \dots\}$  ניתן לתאר גם כך:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\}$$

### שאלה 4

תארו בכתיב מתמטי את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים השלמים שאינם שליליים.

ב. קבוצת המספרים הממשיים החיוביים.

ג. קבוצת המספרים הממשיים שבין 1 ל-5 (כולל הקצוות).

ד. קבוצת המספרים הזוגיים (רמז: מספר זוגי הוא כפולה של מספר שלם ב-2).

התשובה בעמוד 250

### קטעים על הישר

העניין העיקרי שלנו בקורס הזה יהיה בקבוצות של מספרים ממשיים, ובמיוחד כאלה המוגבלות על ידי אי־שוויונות.

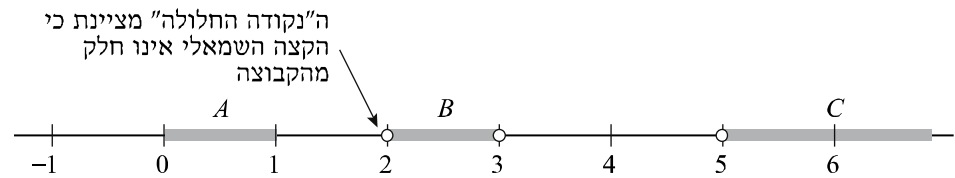
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

נתבונן לדוגמה בקבוצות הבאות,

ובייצוגן הגרפי על פני ציר המספרים הממשיים:



קבוצות אלה הן דוגמאות לקטעים.

ברשימה הבאה מפורטים כל סוגי הקטעים על הישר, וסימוניהם.

- **קטע סגור:** קבוצת הנקודות שבין נקודה  $a$  לנקודה  $b$ , לרבות הקצוות. קטע זה מסומן כך:  $[a, b]$ . הגדרתו בשפה המתמטית היא

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

(נניח כאן ובהגדרות הבאות ש- $a < b$ ).

- **קטע פתוח:** קבוצת הנקודות שבין נקודה  $a$  לנקודה  $b$ , למעט הקצוות. קטע זה מסומן כך:  $(a, b)$ . הגדרתו בשפה המתמטית היא

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- **קטע חצי פתוח:** קבוצת הנקודות שבין נקודה  $a$  לנקודה  $b$ , לרבות אחד הקצוות. יש לכך שתי אפשרויות, המסומנות כך:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{קטע הכולל את הקצה השמאלי})$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (\text{קטע הכולל את הקצה הימני})$$

- **קרן:** קבוצת הנקודות הנמצאת מאחד הצדדים של נקודה  $a$  (כולל או לא כולל הנקודה עצמה). יש ארבעה סוגי קרניים:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad \text{קרן ימנית פתוחה} -$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad \text{קרן ימנית סגורה} -$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad \text{קרן שמאלית פתוחה} -$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \quad \text{קרן שמאלית סגורה} -$$

- **הישר הממשי כולו:** קבוצה זו היא  $\mathbb{R}$ , ומסומנת גם כך:

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$\infty$  נקרא "אינסוף" –  
ומשמעותו כאן היא התמשכות קטע  
ללא סוף לכיוון החיובי. הסמל  $-\infty$   
מציין התמשכות ללא סוף לכיוון  
השלילי.

נסכם את סוגי הקטעים השונים בטבלה הבאה:

| סוג הקטע                         | סימון               | הגדרה                                       | איור                                                                               |
|----------------------------------|---------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| קטע סגור                         | $[a, b]$            | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |   |
| קטע פתוח                         | $(a, b)$            | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$       |   |
| קטע חצי פתוח<br>(כולל קצה שמאלי) | $[a, b)$            | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$    |   |
| קטע חצי פתוח<br>(כולל קצה ימני)  | $(a, b]$            | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$    |   |
| קרן ימנית פתוחה                  | $(a, \infty)$       | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$           |   |
| קרן ימנית סגורה                  | $[a, \infty)$       | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$        |   |
| קרן שמאלית פתוחה                 | $(-\infty, a)$      | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$           |   |
| קרן שמאלית סגורה                 | $(-\infty, a]$      | $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$        |   |
| הישר כולו                        | $(-\infty, \infty)$ | $\mathbb{R}$                                |  |

## שאלה 5

בדקו לגבי כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא:

א.  $1 \in [0, 2]$

ב.  $2 \in (1, 2)$

ג.  $1 \in (-1, \infty)$

ד.  $5 \in (3, 5]$

ה.  $4 \in (-\infty, 3)$

התשובה בעמוד 251

## שאלה 6

בטאו בעזרת סימוני הקטעים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים החיוביים

ב. קבוצת המספרים האי-שליליים

ג. קבוצת המספרים השליליים

התשובה בעמוד 251

## פעולות על קבוצות

בדומה לפעולות בין מספרים, ניתן להגדיר פעולות בין קבוצות. נכיר כמה מהעיקריות שבהן.

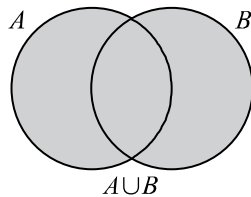
- **פעולת האיחוד:** בהינתן שתי קבוצות  $A$  ו- $B$ , האיחוד שלהן (המסומן  $A \cup B$ ) הוא קבוצת כל האיברים השייכים לפחות לאחת משתי הקבוצות. בכתוב מתמטי,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ או } x \in B\}$$

לדוגמה:

$$\text{אם } A = \{1, 5, 7\} \text{ ו- } B = \{5, 6\} \text{ אז } A \cup B = \{1, 5, 6, 7\}$$

$$\text{אם } A = [1, 2] \text{ ו- } B = [3, 5] \text{ אז האיחוד } A \cup B \text{ נראה כך:}$$



איחוד קבוצות



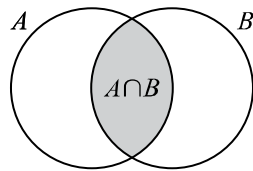
- **פעולת החיתוך:** בהינתן שתי קבוצות  $A$  ו- $B$ , החיתוך שלהן (המסומן  $A \cap B$ ) הוא קבוצת כל האיברים המשותפים לשתי הקבוצות. בכתוב מתמטי,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

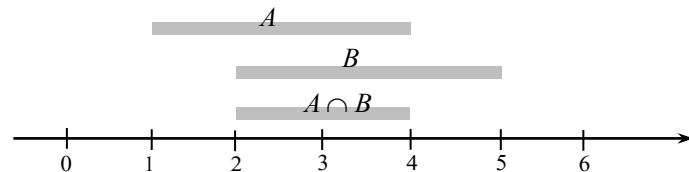
לדוגמה:

$$\text{אם } A = \{1, 5, 7\} \text{ ו- } B = \{5, 6\} \text{ אז } A \cap B = \{5\}$$

$$\text{אם } A = [1, 4] \text{ ו- } B = [2, 5] \text{ אז החיתוך } A \cap B \text{ הוא הקטע } [2, 4], \text{ כפי שממחיש האיור הבא:}$$



חיתוך קבוצות



- **פעולת ההפרש:** בהינתן שתי קבוצות  $A$  ו- $B$ , ההפרש  $A \setminus B$  הוא קבוצת כל האיברים השייכים ל- $A$  ולא ל- $B$ .

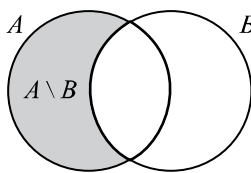
בכתוב מתמטי,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

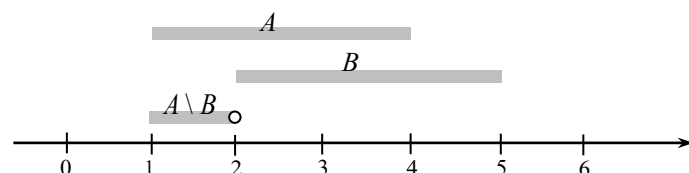
לדוגמה:

$$\text{אם } A = \{1, 5, 7\} \text{ ו- } B = \{5, 6\} \text{ אז } A \setminus B = \{1, 7\}$$

$$\text{אם } A = [1, 4] \text{ ו- } B = [2, 5] \text{ אז ההפרש } A \setminus B \text{ הוא הקטע החצי פתוח } [1, 2), \text{ כפי שממחיש האיור הבא:}$$



הפרש בין קבוצות



◁ שימו לב כי הנקודה 2 שייכת לקבוצה  $B$  ולכן לא שייכת להפרש  $A \setminus B$ .



## שאלה 7

התשובה בעמוד 251

תהינה  $A = \{4, 1/2, 1, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ . מצאו את הקבוצות  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ .

## שאלה 8

תארו את הקבוצות הבאות כקטעים, או כאיחוד של קטעים (מומלץ להיעזר בתרשים מתאים).

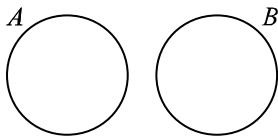
- א.  $(1,3) \cap (0,2)$       ב.  $(1,3) \cap (0,4)$       ג.  $[2,5] \cap [1,3)$   
ד.  $(1,3) \setminus (0,2)$       ה.  $(0,5) \setminus (1,3)$

התשובה בעמוד 251

## הקבוצה הריקה

הקבוצה הריקה היא קבוצה המתאפיינת בכך שאין לה איברים כלל. ניתן לסמן אותה כך:  $\{\}$ , או על ידי הסימון המיוחד  $\emptyset$ . בשיעור הקודם גילינו שיש משוואות ללא פתרונות – למשל, המשוואה  $x^2 + 1 = 0$ . קבוצת הפתרונות של משוואה כזו היא הקבוצה הריקה.

דרך נוספת שבה מתקבלת הקבוצה הריקה היא בפעולת החיתוך של קבוצות. נתבונן במצב שבו לשתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , אין איברים משותפים. במצב זה, קבוצת האיברים המשותפים ל- $A$  ול- $B$  היא הקבוצה הריקה, כלומר:  $A \cap B = \emptyset$ . במצב זה נאמר שהקבוצות  $A$  ו- $B$  הן **זרות**.



קבוצות זרות

סיימנו את הלימוד בנושא קבוצות, וכעת נחזור לנושא העיקרי של השיעור: אישוויונות.

## תכונות היסוד של יחס הסדר

התכונות של יחס הסדר, שיתוארו כאן, יישמשו אותנו בכל ההיסקים הלוגיים הנוגעים לאישויונות, ובפרט, במשימות ההוכחה והפתרון של אישויונות.

- תכונת המיון: לכל שני מספרים ממשיים  $a$  ו- $b$ , מתקיימת בדיוק אחת מתוך שלוש האפשרויות הבאות:  $a < b$ ,  $a = b$  או  $a > b$ .
- תכונת הטרנזיטיביות: אם  $a > b$  וגם  $b > c$  אז  $a > c$ .
- הוספת קבוע לאישויון: אם  $a > b$  אז  $a + c > b + c$ .
- הפחתת קבוע מאישויון: אם  $a > b$  אז  $a - c > b - c$ .
- הכפלת אישויון בקבוע חיובי: אם  $a > b$  ו- $c > 0$  אז  $ac > bc$ .
- חלוקת אישויון בקבוע חיובי: אם  $a > b$  ו- $c > 0$  אז  $a/c > b/c$ .

## הערות:

1. מקובל לכתוב את צירוף האי-שוויונות  $a > b$  ו- $b > c$  כך:  $a > b > c$ . לפי תכונת הטרנזיטיביות, במצב זה ניתן להסיק שמתקיים  $a > c$ .  
ניתן לכתוב שרשראות ארוכות יותר של אי-שוויונות, למשל  $a > b > c > d$ , שמשמעותה  $a > b$ ,  $b > c$  וגם  $c > d$ . משרשרת זו נובע, בעזרת שימוש חוזר ונשנה בטרנזיטיביות, ש- $a > d$ .
2. לפי התכונות השלישית והרביעית, ניתן להוסיף או להפחית מספר או ביטוי מכל אי-שוויון נתון, זאת בדומה לכללי ההיסק המוכרים לנו לגבי שוויונות.
3. לפי התכונות החמישית והשישית, ניתן להכפיל או לחלק כל אי-שוויון נתון במספר או ביטוי, כל עוד ידוע לנו שמספר זה או ביטוי זה הוא חיובי.  
תכונות אלה דומות לכללי ההיסק שהכרנו לגבי שוויונות, אך חשוב לשים לב להגבלה על חיוביות המספר שבו כופלים. הגבלה זו היא מהותית: **לא ניתן לכפול או לחלק אי-שוויון במספר שלילי**. אם נתבונן, למשל באי-שוויון  $6 > 5$ , וננסה להכפיל אותו ב-1, יתקבל  $-5 > -6$ , ואי-שוויון זה אינו נכון (הרי ידוע ש- $-5 < -6$ ). כך ראינו שהכפלת אי-שוויון במספר שלילי הובילה למסקנה שגויה.  
בהמשך נראה שניתן במקרה כזה להסיק אי-שוויון הפוך.
4. למעשה, תכונה 4 לעיל נובעת מתכונה 3, כי הפחתת המספר  $c$  משני אגפי האי-שוויון שקולה להוספת המספר הנגדי,  $-c$ , לשני האגפים. ניתן להראות שגם תכונה 6 נובעת מהתכונות האחרות.
5. ניתן לנסח גרסאות דומות לתכונות 2-6 לגבי אי-שוויונות חלשים. תכונות אלה נובעות בקלות מהתכונות המקוריות כשמתייחסים לאי-שוויון חלש  $a \geq b$  כצירוף של אפשרויות:  $a > b$  או  $a = b$ , ובוחנים כל אפשרות כזו בנפרד. נראה דוגמה לכך בשאלה הבאה.

## שאלה 9

הוכיחו:

- אם  $a \geq b$  אז  $a + c \geq b + c$ .
- אם  $a \geq b$  ו- $b > c$  אז  $a > c$ .
- אם  $a \geq b$  ו- $b \geq c$  אז  $a \geq c$ .
- אם  $a \geq b$  ו- $c \geq 0$  אז  $ac \geq bc$ .

## תכונות נוספות של יחס הסדר

התכונות השימושיות הבאות הן כולן מסקנות מהתכונות היסודיות של יחס הסדר.

1. חיבור אי־שוויונות:

אם  $a > b$  וגם  $c > d$  אז  $a + c > b + d$ .

משמעות הטענה היא שניתן לחבר אי־שוויונות:

$$a > b$$

$$\underline{c > d}$$

$$a + c > b + d$$

**הוכחה:**

$$a + c > b + c$$

נוסיף  $c$  לאי־שוויון  $a > b$ , ונקבל:

$$b + c > b + d$$

נוסיף  $b$  לאי־שוויון  $c > d$ , ונקבל:

$$a + c > b + c > b + d$$

קיבלנו אפוא

□

$$a + c > b + d$$

מהטרנזיטיביות נקבל:

2. הכפלת אי־שוויונות חיוביים:

יהיו  $a, b, c, d$  מספרים חיוביים.

אם  $a > b$  וגם  $c > d$  אז  $ac > bd$ .

**הערה:** נקרא לאי־שוויון "אי־שוויון חיובי" אם שני אגפיו הם חיוביים.

משמעות הטענה היא שניתן להכפיל אי־שוויונות חיוביים זה בזה:

$$a > b$$

$$\underline{c > d}$$

$$ac > bd$$

**הוכחה:**

נכפיל את האי־שוויון  $a > b$  ב־ $c$  (אפשרי כי  $c > 0$ ). נקבל:  $ac > bc$

נכפיל את האי־שוויון  $c > d$  ב־ $b$  (אפשרי כי  $b > 0$ ). נקבל:  $bc > bd$

$$ac > bc > bd$$

קיבלנו אפוא

□

$$ac > bd$$

מהטרנזיטיביות נקבל:

שימו לב כי לא ניתן לוותר על דרישת החיוביות. הכפלת אי־שוויונות ללא הקפדה על

נתאי זה עלולה לייצר אי־שוויונות שגויים. לדוגמה, נתבונן באי־שוויונות הבאים:

$$1 > -2$$

$$2 > -2$$

הכפלה שלהם תייצר אי־שוויון שגוי בעליל:  $2 > 4$ .

3. היפוך כיוון אי־שוויון:

אם  $a > b$  אז  $-a < -b$ .

לדוגמה:  $5 > 3$  ולכן  $-5 < -3$ .

### הוכחה:

נפחית משני אגפי השוויון  $a > b$  את המספר  $b$ . נקבל:

$$a - b > 0$$

$$-b > -a$$

□

$$-a < -b$$

נפחית מאי־שוויון זה את המספר  $a$ :  
כלומר,

בפרט, אם נציב  $b = 0$ , נקבל את המסקנה הבאה:

אם  $a > 0$  אז  $-a < 0$

ואם נציב  $a = 0$ , נקבל את המסקנה:

אם  $b < 0$  אז  $-b > 0$ .

4. הכפלת אי־שוויון במספר שלילי:

אם  $a > b$  ו־ $c < 0$  אז  $ac < bc$ .

◁ שימו לב לכך שכיוון האי־שוויון  
התהפך.

### הוכחה:

כפי שראינו בסעיף הקודם, מכך ש־ $c < 0$  נובע ש־ $-c > 0$ .

נכפיל את האי־שוויון  $a > b$  במספר החיובי  $-c$ , ונקבל:

$$-ac > -bc$$

□

$$ac < bc$$

מתכונת היפוך כיוון האי־שוויון נקבל:

5. חלוקת אי־שוויון במספר שלילי:

אם  $a > b$  ו־ $c < 0$  אז  $a/c < b/c$ .

הוכחת תכונה זו דומה להוכחת תכונה 4.

6. כללי הסימנים בכפל:

אם  $a > 0$  ו־ $b > 0$  אז  $ab > 0$

אם  $a > 0$  ו־ $b < 0$  אז  $ab < 0$

אם  $a < 0$  ו־ $b < 0$  אז  $ab > 0$

הכרנו כבר את הכללים האלה בנוסח: מכפלת שני מספרים חיוביים היא חיובית, מכפלת חיובי ושלילי היא שלילית, מכפלת שני מספרים שליליים היא חיובית.

נראה כעת איך ניתן להוכיח כללים אלה.

### הוכחה:

אם  $a > 0$  ו-  $b > 0$ , נכפיל את האי-שוויון  $a > 0$  במספר החיובי  $b$  ונקבל:  $ab > 0$ .  
 אם  $a > 0$  ו-  $b < 0$ , נכפיל את האי-שוויון  $a > 0$  במספר החיובי  $a$  ונקבל:  $ab < 0$ .  
 אם  $a < 0$  ו-  $b < 0$ , נכפיל את האי-שוויון  $a < 0$  במספר השלילי  $b$  ונקבל (לפי תכונה 4 לעיל) אי-שוויון בכיוון ההפוך:  $ab > 0$ .  
 $\square$

◁ מספר זוגי הוא מספר שלם המתחלק ב-2 ללא שארית; מספר אי-זוגי הוא מספר שלם שאינו זוגי.

מכללים אלה נובע שמכפלה של מספר זוגי של מספרים שליליים היא מספר חיובי; ומכפלה של מספר אי-זוגי של מספרים שליליים היא מספר שלילי.  
 לכן, בהינתן רשימה של מספרים שונים מאפס, מכפלת המספרים היא חיובית אם ורק אם מספר הגורמים השליליים שבה הוא זוגי.

לדוגמה: המכפלה  $(-1) \times (-3) \times 2 \times 5 \times (-1) \times (-2)$   
 היא חיובית, כי יש בה ארבעה גורמים שליליים, ו-4 הוא מספר זוגי;  
 ולעומתה המכפלה  $(-4) \times (-2) \times 3 \times (-1) \times 9$   
 היא שלילית כי יש בה שלושה גורמים שליליים, ו-3 הוא מספר אי-זוגי.

7. כללי הסימנים בחילוק:

אם  $a > 0$  ו-  $b > 0$  אז  $a/b > 0$   
 אם  $a > 0$  ו-  $b < 0$  אז  $a/b < 0$   
 אם  $a < 0$  ו-  $b < 0$  אז  $a/b > 0$

כללים אלה דומים מאוד לכללי הסימנים בכפל, וגם הוכחתם דומה.

8. ביצוע "1 חלקי" לאי-שוויון חיובי:

יהיו  $a$  ו-  $b$  מספרים חיוביים.  
 אם  $a > b$  אז  $1/a < 1/b$ .

הוכחה: לפי כללי הסימנים,  $ab$  הוא מספר חיובי. נחלק את האי-שוויון  $a > b$  ב-  $ab$ :

$$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$$

$\square$  נצמצם את השברים:

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

9. אי-שליליות של ריבוע:

לכל  $a$  ממשי,  $a^2 \geq 0$ .  
 לכל  $a \neq 0$ ,  $a^2 > 0$ .

**הוכחה:**

לפי תכונת המיון של יחס הסדר, בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות נכונה:

$$a > 0 \text{ או } a = 0 \text{ או } a < 0$$

אם  $a > 0$  אז לפי חוקי הסימנים,  $a^2 = a \cdot a > 0$

אם  $a = 0$  אז  $a^2 = 0$

אם  $a < 0$  אז לפי חוקי הסימנים,  $a^2 = a \cdot a > 0$

לכן בכל המקרים מתקיים  $a^2 \geq 0$ , ואם  $a \neq 0$  אז  $a^2 > 0$ .  $\square$

**הערה:** כללית יותר, לכל  $n$  טבעי מתקיים  $a^{2n} \geq 0$ , כי לפי חוקי החזקות  $a^{2n} = (a^n)^2$ , וכפי שהוכחנו כעת, ריבוע הוא אי-שלילי.

לכן כל החזקות הזוגיות של מספר ממשי  $a$  ( $a^2, a^4, a^6, \dots$ ) הן אי-שליליות, ואם  $a \neq 0$  אז הן חיוביות.

10. העלאה בריבוע של אי-שוויון חיובי:

יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים.

אם  $a > b$  אז  $a^2 > b^2$ .

**הוכחה:**

מכיוון שהאי-שוויון  $a > b$  הוא חיובי, ניתן לכפול אותו בעצמו ולקבל:  $a \cdot a > b \cdot b$ , כלומר  $a^2 > b^2$ .  $\square$

**הערה:**

באופן דומה ניתן להוכיח את הטענה הכללית הבאה:

אם  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים,  $a > b$  ו- $n$  מספר טבעי אז  $a^n > b^n$ .

11. הוצאת שורש מאי-שוויון חיובי:

יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים.

אם  $a > b$  אז  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ .

**הוכחה:**

נוכיח את הטענה בדרך השלילה. משמעות דרך זו היא שמניחים שהטענה אינה נכונה (הנחת השלילה), ומגיעים לסתירה (כלומר למסקנה שמנוגדת לדברים שידועים לנו). בכך מתברר שהנחת השלילה אינה נכונה, ולכן הטענה המקורית נכונה.

נניח אפוא ש- $a > b$  ושלא מתקיים  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ .

לפי תכונת המיון של יחס הסדר, מתקיים  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  או  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  (כלומר, מתקיים  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ ). אם  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  אז נעלה את השוויון בריבוע ונקבל  $a = b$ .

אם  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  אז נעלה את האי־שוויון בריבוע (ניתן לעשות זאת לפי תכונה 10 לעיל), ונקבל  $a < b$ . לכן בכל המקרים נקבל  $a \leq b$ , וזו סתירה לכך ש־ $a > b$ .  
קיבלנו אפוא סתירה, ולכן הנחת השלילה אינה נכונה. מכאן מתקבל ש־ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ .  $\square$

**הערה:** באופן דומה ניתן להוכיח את הטענה הכללית הבאה:  
אם  $a$  ו־ $b$  מספרים חיוביים,  $a > b$  ו־ $n$  מספר טבעי אז  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ .

לסיכום, הכרנו מגוון תכונות של יחס הסדר, שימשו אותנו בטיפול באי־שוויונות. הכרת ההוכחות של תכונות אלה מקלה על הבנתן ועל היכולת לזכור אותן ולהיעזר בהן במקרה הצורך. למרבית התכונות המנוסחות עם אי־שוויונות חזקים ( $>$  או  $<$ ), יש גרסאות מקבילות עם אי־שוויונות חלשים ( $\geq$  או  $\leq$ ). תמיד ניתן לקבל גרסאות אלה על ידי הפרדת אי־שוויון חלש  $a \leq b$  למקרים:  $a < b$  או  $a = b$ . נראה כמה דוגמאות לכך בשאלה הבאה.

## שאלה 10

הוכיחו:

- אם  $a \geq b$  וגם  $c \geq d$  אז  $a + c \geq b + d$ .
- אם  $a \geq b$  וגם  $c > d$  אז  $a + c > b + d$ .
- אם  $a \geq 0$  וגם  $b \geq 0$  אז  $ab \geq 0$ .
- אם  $a \geq b \geq 0$  וגם  $c \geq d \geq 0$  אז  $ac \geq bd$ .
- אם  $a \geq b$  אז  $-a \leq -b$ .

התשובה בעמוד 253

בשאלה הבאה נוכיח מסקנות נוספות לגבי יחס הסדר.

## שאלה 11

הוכיחו את הטענות הבאות:

- אם  $b > 0$  אז  $a + b > a$ .
- אם  $b \geq 0$  אז  $a + b \geq a$ .
- אם  $b < 0$  אז  $a + b < a$ .
- אם  $b \leq 0$  אז  $a + b \leq a$ .
- אם  $a > 0$  ו־ $b > 1$  אז  $ab > a$ .
- אם  $a > 0$  ו־ $b < 1$  אז  $ab < a$ .
- סכום של מספרים חיוביים הוא חיובי, וסכום של מספרים שליליים הוא שלילי.

התשובה בעמוד 254

## הוכחה של אי־שוויונות פשוטים

נדגים הוכחה של אי־שוויונות הנובעים מאי־שליליות הריבוע:

א. נוכיח כי  $5 - x^2 \leq 5$  לכל  $x$  ממשי:  
לפי תכונת אי־שליליות הריבוע,

$$x^2 \geq 0$$

- לפי תכונת היפוך האי-שוויון,  $-x^2 \leq 0$
- נוסיף 5 לשני האגפים:  $5 - x^2 \leq 5$  □
- ב. נוכיח כי לכל  $a, b$  ממשיים מתקיים  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ :
- לפי תכונת אי-שליליות הריבוע,  $(a - b)^2 \geq 0$
- מנוסחאות הכפל המקוצר נקבל:  $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
- נוסיף  $2ab$  לשני האגפים:  $a^2 + b^2 \geq 2ab$
- נחלק ב-2 (אפשרי כי 2 מספר חיובי):  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$
- כלומר,  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$  □

## שאלה 12

- א. הוכיחו כי לכל  $a, b$  ממשיים מתקיים  $a^2 + b^2 \geq 0$ . מתי מתקיים שוויון?
- ב. הוכיחו כי לכל  $a$  חיובי מתקיים  $a + 1/a \geq 2$ . מתי מתקיים שוויון?
- רמז: הוכיחו תחילה כי מתקיים  $a^2 + 1 \geq 2a$ .

התשובה בעמוד 255

בדוגמאות הבאות נראה כיצד ניתן לקבל הערכות מלמעלה ומלמטה על ערך של ביטוי, כאשר נתונות הגבלות על המשתנים שבו.

- א. נוכיח שאם  $a \in (2, 3)$  אז  $3a + 5 \in (11, 14)$ :

נזכיר שהקבוצה  $(2, 3)$  היא קבוצת כל המספרים שבין 2 ל-3, למעט הקצוות:

$$(2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$$

לכן הנתון  $a \in (2, 3)$  שקול לכך ש-  $2 < a < 3$ .

נכפול אי-שוויונות אלה במספר החיובי 3:

$$6 < 3a < 9$$

(הסבר: הסימון  $2 < a < 3$  מציין שני אי-שוויונות, וגם  $a < 3$ . לאחר הכפלה ב-3 מתקבל ש-  $6 < 3a < 9$  וגם  $3a < 9$  וברישום המקוצר  $6 < 3a < 9$ ).

כעת נוסיף לאי-שוויונות אלה 5:

$$11 < 3a + 5 < 14$$

כלומר,  $3a + 5 \in (11, 14)$

- ב. נניח ש-  $a \in [1, 2]$  וננסה לקבל הערכה על הביטוי  $(4a - 2)/(a + 3)$ .

הנתאי  $a \in [1, 2]$  שקול לכך ש-  $1 \leq a \leq 2$ .

נכפיל נתאי זה במספר החיובי 4:

$$4 \leq 4a \leq 8$$

נפחית 2 מכל האגפים:  $2 \leq 4a - 2 \leq 6$  (1)

כדי להעריך את המכנה, נוסיף 3 לנתאי  $1 \leq a \leq 2$ :

$$4 \leq a + 3 \leq 5$$

ראו הגדרת קטע פתוח בעמוד 139

ראו הגדרת קטע סגור בעמוד 139



נזכור כי אחת התכונות הבסיסיות של יחס הסדר מאפשרת ביצוע "1 חלקי" לאי־שוויון חיובי, בהיפוך כיוון האי־שוויון.

$$\frac{1}{a+3} \leq \frac{1}{4} \quad \text{לכן מ-} a+3 \leq 4 \text{ נקבל}$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{a+3} \quad \text{ומ-} a+3 \leq 5 \text{ נקבל}$$

$$(2) \quad \frac{1}{5} \leq \frac{1}{a+3} \leq \frac{1}{4} \quad \text{ביחד קיבלנו:}$$

כעת נכפול את האי־שוויונות החיוביים (1) ו־(2) זה בזה:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{4a-2}{a+3} \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

קיבלנו אפוא שהביטוי  $(4a-2)/(a+3)$  שייך לקטע  $[2/5, 3/2]$ , כלומר לקטע  $[0.4, 1.5]$ .

ניתן למעשה לקבל הערכה מדויקת יותר על הביטוי  $(4a-2)/(a+3)$ . לצורך כך, נבטא אותו באופן שונה:

$$(3) \quad \frac{4a-2}{a+3} = \frac{4a+12-14}{a+3} = \frac{4(a+3)-14}{a+3} = 4 - \frac{14}{a+3}$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{a+3} \leq \frac{1}{4} \quad \text{נעריך את הביטוי שהתקבל. כבר ידוע לנו שמתקיים}$$

$$\frac{14}{5} \leq \frac{14}{a+3} \leq \frac{14}{4} \quad \text{נכפול במספר החיובי 14:}$$

$$-\frac{14}{a+3} \leq -\frac{14}{5}, \quad -\frac{14}{4} \leq -\frac{14}{a+3} \quad \text{לפי תכונת היפוך האי־שוויון:}$$

$$-\frac{14}{4} \leq -\frac{14}{a+3} \leq -\frac{14}{5} \quad \text{כלומר,}$$

$$4 - \frac{14}{4} \leq 4 - \frac{14}{a+3} \leq 4 - \frac{14}{5} \quad \text{נוסיף 4:}$$

$$4 - \frac{14}{4} \leq \frac{4a-2}{a+3} \leq 4 - \frac{14}{5} \quad \text{מהשוויון (3) נובע:}$$

$$0.5 \leq \frac{4a-2}{a+3} \leq 1.2 \quad \text{כלומר,}$$

קיבלנו אפוא אינפורמציה מדויקת יותר על ערך הביטוי  $(4a-2)/(a+3)$ : ערך זה נמצא בקטע  $[0.5, 1.2]$ .

שימו לב שהתשובות שקיבלנו בשתי הדרכים אינן סותרות. הדבר דומה למצב שבו נאמר לנו שאדם מסוים נמצא בישראל, ולאחר מכן שהוא נמצא בתל־אביב. המידע החדש אינו סותר את המידע הישן, אך הוא מדויק יותר.

## שאלה 13

א. נניח ש- $3 < x < 4$  ו- $10 < y < 20$ . מצאו הערכה (מדויקת ככל הניתן) לביטוי  $x/(xy+1)$ .

ב. אם  $3 \leq x < 4$  ו- $y \geq 2$ , מצאו הערכה לביטוי:  $\frac{x}{2 + \frac{1}{y}}$ .

ג. אם  $x \in (2, 2.25)$ , מצאו הערכה לביטוי  $\sqrt{x} - x^2$ .

ד. אם  $x \in [2, 3)$ , מצאו הערכה לביטוי:  $\frac{1}{2 + \frac{3}{x}}$ .

התשובה בעמוד 256

## מעברי שקילות באי-שוויונות

הכללים שלמדנו עד כה מאפשרים להסיק אי-שוויונות מאי-שוויונות אחרים.

לדוגמה, הכרנו את הכלל: אם  $a > b$  אז  $a + c > b + c$ .

נוכל לכתוב כלל זה כך:  $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

חלק מהכללים ניתנים לחיזוק, ולהצגה כשקילות. לדוגמה, נוכיח מייד שמתקיים  $a > b$  אם

**ורק אם**  $a + c > b + c$ :  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

שקילויות מסוג זה יאפשרו לנו למצוא במדויק את קבוצת הפתרונות של אי-שוויון נתון, בדומה לדרך שבה פתרנו משוואות אלגבריות על ידי מעברי שקילות.

מעברי שקילות מקלים גם על הוכחה של אי-שוויונות: כדי להוכיח אי-שוויון מסוים, מספיק להראות שהוא שקול לאי-שוויון ידוע.

ברשימה הבאה מפורטים כמה ממעברי השקילות העיקריים:

א. לכל  $a, b, c$  ממשיים:  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

משמעות כלל זה היא שניתן להוסיף מספר או ביטוי לשני אגפי אי-שוויון ולקבל אי-שוויון שקול.

## הוכחה:

אם  $a > b$  אז נוסיף לשני האגפים  $c$  ונקבל:  $a + c > b + c$ .

אם  $a + c > b + c$  אז נפחית משני האגפים  $c$  ונקבל ש- $a > b$ .

הראינו שכל אחת מהטענות  $a > b$ ,  $a + c > b + c$  נובעת מרעותה. לכן הן שקולות.  $\square$

ב. לכל  $a, b, c$  ממשיים:  $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$

המשמעות: ניתן לחסר מספר או ביטוי משני אגפי אי-שוויון ולקבל אי-שוויון שקול.

כלל זה נובע מיידית מהכלל הקודם, שכן הפחתת  $c$  משני האגפים שקולה להוספת  $-c$  לשני האגפים.

ג. לכל  $a, b$  ממשיים ולכל  $c$  חיובי:  $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

המשמעות: ניתן להכפיל את שני האגפים של אי־שוויון במספר **חיובי** ולקבל אי־שוויון שקול.

#### הוכחה:

אם  $a > b$  אז נכפיל את שני האגפים במספר החיובי  $c$ , ונקבל:  $ac > bc$ .

□ אם  $ac > bc$  אז נחלק את שני האגפים במספר החיובי  $c$  ונקבל:  $a > b$ .

ד. לכל  $a, b$  ממשיים ולכל  $c$  חיובי:  $a > b \Leftrightarrow a/c > b/c$

המשמעות: ניתן לחלק את שני האגפים של אי־שוויון במספר **חיובי** ולקבל אי־שוויון שקול.

כלל זה נובע מיידית מהכלל הקודם, שכן חלוקת שני האגפים ב־ $c$  שקולה להכפלתם במספר החיובי  $1/c$ .

ה. כלל השוואות השברים: נניח ש־ $b, d$  חיוביים. אז:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$$

#### הוכחה:

אם נכפיל את שני אגפי האי־שוויון  $a/b > c/d$  במספר החיובי  $bd$ , יתקבל האי־שוויון

□  $ad > bc$ . לפי הטענה בסעיף ג, שני האי־שוויונות שקולים.

לדוגמה, אם נרצה לדעת איזה מבין שני השברים הבאים גדול יותר:  $\frac{4}{7}$  או  $\frac{3}{5}$ , נחשב את

המכפלות באלכסון:  $3 \cdot 7 = 21$ ,  $4 \cdot 5 = 20$ . מצאנו ש־ $3 \cdot 7 > 4 \cdot 5$  ולכן  $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$ .

ו. לכל  $a, b$  ממשיים ולכל  $c$  **שלילי**:  $a > b \Leftrightarrow ac < bc$

שימו לב להיפוך בכיוון האי־שוויון.

#### הוכחה:

אם  $a > b$  אז נכפיל את שני האגפים במספר השלילי  $c$ , ונקבל אי־שוויון בכיוון ההפוך:

$$ac < bc$$

אם  $ac < bc$  אז נחלק את שני האגפים במספר השלילי  $c$ , ונקבל אי־שוויון בכיוון

□ ההפוך:  $a > b$ .

ז. לכל  $a, b$  ממשיים ולכל  $c$  **שלילי**:  $a > b \Leftrightarrow a/c < b/c$

כלל זה נובע מהכלל בסעיף הקודם, שכן חלוקה במספר השלילי  $c$  שקולה לכפל במספר השלילי  $1/c$ .

ח. לכל  $a, b$  ממשיים:  $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

כלל זה נובע מהכלל בסעיף ו, בהצבה  $c = -1$ .

ט. לכל  $a, b$  חיוביים נכונות השקילויות הבאות:  $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

#### שאלה 14

הוכיחו את הטענות שבסעיף ט.

התשובה בעמוד 257

לסיום הצגת מעברי השקילות, נעיר שכללים אלה נכונים גם בהחלפת האי־שוויונות באי־שוויונות חלשים.

נוכל לסכם את הכללים העיקריים כך:

- ניתן להוסיף או להפחית מספר או ביטוי לשני האגפים של אי־שוויון (חזק או חלש) ולקבל אי־שוויון שקול.
- ניתן להכפיל או לחלק את שני האגפים של אי־שוויון (חזק או חלש) במספר או ביטוי חיובי, ולקבל אי־שוויון שקול.
- הכפלה או חלוקה של שני אגפים של אי־שוויון (חזק או חלש) במספר או ביטוי שלילי מניבה אי־שוויון בכיוון ההפוך, השקול לאי־שוויון המקורי.

#### שאלה 15

היעזרו בשקילויות כדי להוכיח שלכל  $a$  חיובי מתקיים:

$$\frac{a+1}{a+2} < \frac{a+3}{a+4}$$

התשובה בעמוד 258

#### שאלה 16

בדקו איזה מבין המספרים הבאים גדול יותר:

א.  $7/13$  או  $5/9$       ב.  $19/51$  או  $-1/3$       ג.  $-12/17$  או  $-8/11$

התשובה בעמוד 258

#### פתרון של אי־שוויונות לינאריים

כאמור במבוא לשיעור זה, אנו מבחינים בין משימת ההוכחה של אי־שוויונות למשימת הפתרון של אי־שוויונות, בדומה להבחנה בין הוכחה של זהויות לפתרון של משוואות. כללי השקילות שלמדנו יאפשרו לנו לפתור אי־שוויונות. נתחיל מהסוג הפשוט ביותר: אי־שוויונות לינאריים – כלומר, אי־שוויונות שבשני אגפיהם נמצאים ביטויים מהצורה  $ax + b$ .

נתבונן לדוגמה באי־שוויון הבא:

$$8x + 1 > 3x + 5$$

נחסר משני האגפים  $3x$ , ונקבל אי־שוויון שקול:

$$\Leftrightarrow 5x + 1 > 5$$

נחסר 1 משני האגפים:

$$\Leftrightarrow 5x > 4$$

נחלק את שני האגפים במספר החיובי 5:

$$\Leftrightarrow x > \frac{4}{5}$$

משרשרת השקילויות נסיק ש־ $x$  מקיים את האי־שוויון המקורי  $8x + 1 > 3x + 5$  אם ורק אם  $x$  גדול מ־ $4/5$ .

מצאנו, אפוא, אפיון לקבוצת הפתרונות של האי־שוויון המקורי, כלומר קבוצת ה־ $x$ ים המקיימים את האי־שוויון. קבוצה זו היא

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4}{5} \right\}$$

$$\left( \frac{4}{5}, \infty \right)$$

כלומר הקרן הפתוחה

כדי לקבל המחשה לאפיון זה, נציב באי־שוויון המקורי מספר מקבוצת הפתרונות ומספר שאינו מקבוצת הפתרונות.

אם נציב, למשל,  $x = 1$  (מספר השייך לקבוצת הפתרונות  $(4/5, \infty)$ ), נקבל באגף השמאלי  $8x + 1 = 9$ , ובאגף הימני  $3x + 5 = 8$ . אכן מתקיים:  $8x + 1 > 3x + 5$ .

אם נציב  $x = 0$  (מספר שאינו שייך לקבוצת הפתרונות), נקבל באגף השמאלי  $8x + 1 = 1$ , ובאגף הימני  $3x + 5 = 5$ , ואכן במקרה זה לא מתקיים  $8x + 1 > 3x + 5$ .

## שאלה 17

פתרו את האי־שוויונות הבאים (כלומר, אפיינו במדויק את קבוצת הפתרונות).

א.  $15x - 1 > 4$       ב.  $3 - 2x \leq 6x + 1$       ג.  $\frac{x+1}{5} \leq 2x$

ד.  $\frac{8x+1}{2} < 4x$       ה.  $-3x > -2$

התשובה בעמוד 259

## שיטת החלוקה למקרים

טכניקה שימושית לפתרון אי־שוויונות היא חלוקת הישר הממשי לכמה חלקים, מציאת הפתרונות בכל חלק בנפרד, ולבסוף איחוד קבוצות הפתרונות שהתקבלו לקבלת קבוצת הפתרונות המלאה.

נדגים שיטה זו בפתרון האי־שוויון הבא:

$$\frac{x+3}{2x-1} > 1$$

במבט ראשון, נראה כי צעד טבעי לפתרון אי־שוויון זה הוא הכפלת שני האגפים במכנה  $2x - 1$ , שתוביל לאי־שוויון לינארי.

אך מוטב שניזהר, כי התוצאה של הכפלת אי-שוויון במספר תלויה בסימן המספר: הכפלת אי-שוויון במספר חיובי שומרת על כיוונו של האי-שוויון, והכפלת אי-שוויון במספר שלילי הופכת את כיוונו.

נבדוק מתי המכנה  $2x - 1$  הוא חיובי ומתי הוא שלילי:

$$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$2x - 1$  חיובי בדיוק כאשר  $x > 1/2$ , ובאופן דומה,  $2x - 1$  שלילי בדיוק כאשר  $x < 1/2$ .

לכן נתבונן בנפרד בכל אחד מהמקרים הבאים:

**מקרה ראשון:**  $x > 1/2$ .

במקרה זה  $2x - 1 > 0$ , ולכן ניתן לכפול את האי-שוויון המקורי ב- $2x - 1$  ולקבל אי-שוויון שקול באותו הכיוון:

$$\frac{x+3}{2x-1} > 1 \Leftrightarrow x+3 > 2x-1$$

לאחר העברת אגפים פשוטה, נקבל שאי-שוויון זה שקול לכך ש- $x < 4$ .

לכן קבוצת הפתרונות המקיימים  $x > 1/2$  היא הקבוצה  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 4\right\}$

**מקרה שני:**  $x < 1/2$ .

במקרה זה  $2x - 1 < 0$ , ולכן ניתן לכפול את האי-שוויון המקורי ב- $2x - 1$  ולקבל אי-שוויון שקול בכיוון ההפוך:

$$\frac{x+3}{2x-1} > 1 \Leftrightarrow x+3 < 2x-1$$

לאחר העברת אגפים, נקבל שאי-שוויון זה שקול לכך ש- $x > 4$ .

נשים לב שהתנאים  $x > 4$  ו- $x < 1/2$  אינם יכולים להתקיים בו-זמנית (כי אם  $x < 1/2$  אז לפי תכונת הטרנזיטיביות,  $x < 4$ ). לכן אין פתרונות המקיימים  $x < 1/2$ . לשון אחר: קבוצת הפתרונות של האי-שוויון המקורי בקטע  $(-\infty, 1/2)$  היא הקבוצה הריקה.

**מקרה שלישי:**  $x = 1/2$ .

מקרה זה נשלל מיידית, שכן במקרה זה המכנה  $2x - 1$  מתאפס, ובוודאי האי-שוויון המקורי אינו מתקיים, כי האגף השמאלי שבו אינו מוגדר.

נסכם: רק במקרה  $x > 1/2$  נמצאו פתרונות, וקבוצת הפתרונות במקרה זה היא

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 4\right\} = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

לכן הקבוצה  $(1/2, 4)$  היא קבוצת הפתרונות המלאה.

שיטת החלוקה למקרים יעילה בסוגים רבים של אי־שוויונות. כפי שראינו בדוגמה, בחירה מושכלת של הגדרת המקרים השונים היא המפתח להצלחה במשימת הפתרון.

במקרה שניתחנו, חלוקת המקרים היתה לגבי מיקומו של  $x$  ביחס לנקודה  $1/2$  (גדול/קטן/שווה). יש מקרים מורכבים יותר שבהם החלוקה היא ביחס לכמה נקודות. נראה דוגמאות לכך בשאלה שלפנינו ובהמשך.

### שאלה 18

פתרו את האי־שוויונות הבאים:

א.  $\frac{x}{x-2} > 8$

ב.  $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{3-x}$

התשובה בעמוד 260

הדרכה: בסעיף ב, התבוננו בנפרד במקרים  $x < 1$ ,  $1 < x < 3$ ,  $x > 3$ .

### אי־שוויון לגבי סימן מכפלה

נזכיר את הכלל הבא:

**בהינתן רשימה של מספרים שונים מאפס, מכפלת המספרים היא חיובית אם ורק אם מספר הגורמים השליליים שבה הוא זוגי.**

ראו עמוד 146

בעזרת כלל זה נוכל לפתור אי־שוויונות מהצורות הבאות:

$$0 < \text{מכפלת גורמים} / \geq 0 / < 0 / \leq 0$$

הדרך המומלצת לפתרון אי־שוויונות מסוג זה היא חלוקה למקרים לפי מיקומו של הנעלם ביחס לנקודות ההתאפסות של כל אחד מהגורמים.

נתבונן למשל באי־שוויון הבא:

$$(x-1)(x+2)(2x+5) > 0$$

האגף השמאלי הוא מכפלה של שלושה גורמים:  $x-1$ ,  $x+2$  ו־ $2x+5$ .

הביטוי  $x-1$  מתאפס בדיוק כאשר  $x=1$  (כלומר  $x=1$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה  $x-1=0$ ). הביטוי  $x+2$  מתאפס בדיוק כאשר  $x=-2$ , והביטוי  $2x+5$  מתאפס בדיוק כאשר  $x=-5/2 = -2.5$ .

אם  $x$  שווה לאחד הערכים  $1$ ,  $-2$ ,  $-2.5$  אז המכפלה  $(x-1)(x+2)(2x+5)$  מתאפסת, ולכן האי־שוויון אינו מתקיים. לכן נניח מעתה ש־ $x$  אינו אחד מערכים אלה.

ננתח לגבי כל אחד מהגורמים, היכן (כלומר עבור איזה ערכים של  $x$ ) הוא חיובי והיכן הוא שלילי.

$$\begin{aligned} x - 1 < 0 &\Leftrightarrow x < 1 && \text{לגבי הגורם } x - 1, \text{ מתקיים} \\ x - 1 > 0 &\Leftrightarrow x > 1 && \text{ובאופן דומה:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 < 0 &\Leftrightarrow x < -2 && \text{לגבי הגורם } x + 2, \text{ מתקיים} \\ x + 2 > 0 &\Leftrightarrow x > -2 && \text{ובאופן דומה:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 5 > 0 &\Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -2.5 && \text{לגבי הגורם } 2x + 5: \\ 2x + 5 < 0 &\Leftrightarrow x < -2.5 && \text{ובאופן דומה:} \end{aligned}$$

כעת נסמן את נקודות ההתאפסות של הביטויים על פני ציר המספרים:



נתבונן, בהתאם, במקרים הבאים:

**מקרה א:**  $x < -2.5$

במקרה זה מתקיים, כאמור,  $2x + 5 < 0$ .

כמו כן, מהתנאי  $x < -2.5$  נובע ש־ $x < -2$  (לפי תכונת הטרנזיטיביות, שהרי  $-2.5 < -2$  ולכן  $x < -2.5$  ולכן  $x + 2 < 0$ ).  
לבסוף, מהתנאי  $x < -2.5$  נובע גם ש־ $x < 1$  ולכן  $x - 1 < 0$ .

לכן במקרה זה, כל הגורמים  $x - 1$ ,  $x + 2$ , ו־ $2x + 5$  הם שליליים. במכפלה  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5)$  יש, אפוא, שלושה גורמים שליליים. 3 הוא מספר אי־זוגי ולכן  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) < 0$ .

במקרה זה לא מתקיים האי־שוויון המקורי  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) > 0$ .

**מקרה ב:**  $-2.5 < x < -2$

במקרה זה  $x > -2.5$ , ולכן  $2x + 5 > 0$ .

מתקיים גם  $x < -2$  וכתוצאה מכך  $x < 1$ , ולכן (כמו במקרה הקודם)  $x + 2 < 0$  ו־ $x - 1 < 0$ .

במקרה זה, מבין הגורמים  $x - 1$ ,  $x + 2$ , ו־ $2x + 5$  יש שניים שליליים ואחד חיובי. לכן המכפלה  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5)$  היא חיובית, והאי־שוויון המקורי  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) > 0$  מתקיים.



**מקרה ג:  $-2 < x < 1$**

במקרה זה  $x > -2$ , ולכן  $x > -2.5$ , וכן  $x < 1$ .  
מכאן נובע ש-  $2x + 5 > 0$ ,  $x + 2 > 0$  ו-  $x - 1 < 0$ .  
לכן במכפלה  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5)$  יש בדיוק גורם אחד שלילי, ולפיכך היא שלילית.  
במקרה זה לא מתקיים  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) > 0$ .

**מקרה ד:  $x > 1$**

במקרה זה מתקיים גם  $x > -2.5$  ו-  $x > -2$ .  
לכן כל הגורמים במכפלה  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5)$  הם חיוביים, והמכפלה כולה היא חיובית.  
במקרה זה מתקיים האי-שוויון  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) > 0$ .

נסכם את ממצאינו בטבלה הבאה:

| המקרה           | הביטוי<br>$x - 1$ | הביטוי<br>$x + 2$ | הביטוי<br>$2x + 5$ | המכפלה<br>$(x - 1)(x + 2)(2x + 5)$ |
|-----------------|-------------------|-------------------|--------------------|------------------------------------|
| $x < -2.5$      | -                 | -                 | -                  | -                                  |
| $-2.5 < x < -2$ | -                 | -                 | +                  | +                                  |
| $-2 < x < 1$    | -                 | +                 | +                  | -                                  |
| $x > 1$         | +                 | +                 | +                  | +                                  |

מכל האמור לעיל נובע שהאי-שוויון  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) > 0$  מתקיים אם ורק אם  
 $-2.5 < x < -2$  או  $x > 1$ .

קבוצת הפתרונות היא  
כלומר:  $\{x \mid -2.5 < x < -2 \text{ או } x > 1\}$

$$(-2.5, -2) \cup (1, \infty)$$

כעת נתבונן באי-שוויון דומה:

$$\frac{(x - 1)(x + 2)}{2x + 5} > 0$$

הערכים  $x = 1$  ו-  $x = -2$  אינם פתרון של אי-שוויון זה, כי האגף השמאלי מתאפס בהם.  
הערך  $x = -2.5$  גם הוא אינו פתרון, אך הפעם מסיבה אחרת: עבור ערך זה, מופיע 0 במכנה של האגף השמאלי, ולכן הביטוי באגף השמאלי אינו מוגדר.

אם  $x$  אינו אחד הערכים  $-2.5, -2, 1$  אז כפי שראינו בדוגמה הקודמת, הביטויים  $x - 1$ ,  $2x + 5$ ,  $x + 2$  אינם מתאפסים. במקרה זה נוכל להיעזר בתכונה הבאה של יחס הסדר (הנובעת מהדמיון בין כללי הסימנים בכפל ובחילוק):

אם  $a \neq 0$  ו-  $b \neq 0$  אז  $a/b > 0$  אם"ם  $ab > 0$ .

לכן האי-שוויון שלעיל מתקיים אם"ם מתקיים  $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) > 0$ . כפי שניתחנו בדוגמה הקודמת, זה קורה אם"ם  $-2.5 < x < -2$  או  $x > 1$ .

קבוצת הפתרונות של אי-שוויון זה היא, כמו במקרה הקודם,  $(-2.5, -2) \cup (1, \infty)$ .

## שאלה 19

פתרו את האי-שוויונות הבאים:

$$\text{א. } (x-2)(x+6) < 0 \quad \text{ב. } \frac{(x-1)(2x-3)}{x+1} \geq 0$$

$$\text{ג. } (x+1)(x+4)(2-x)(3-x) \leq 0 \quad \text{ד. } \frac{2}{x-5} \geq \frac{3}{x-6}$$

הדרכה: בסעיף ד, העבירו אגפים כדי לקבל אי-שוויון מהצורה:  $\geq 0$  מנת ביטויים אלגבריים.

התשובה בעמוד 261

## אי-שוויונות ריבועיים

נעבור להתבונן באי-שוויונות מהצורה הבאה:

דומיהם:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

באי-שוויונות אלה,  $a, b, c$  הם פרמטרים המייצגים מספרים קבועים. אנו נניח ש- $a \neq 0$ . אי-שוויון מאחד הסוגים האלה נקרא **אי-שוויון ריבועי**.

כדי לפתור את כל סוגי האי-שוויונות האלה, עלינו לברר מתי הביטוי  $ax^2 + bx + c$  הוא שלילי, מתי הוא חיובי, ומתי הוא מתאפס.

על האחרונה שבשאלות אלה, כבר ענינו בשיעור הקודם:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{הגדרנו את הדיסקרימיננטה}$$

$$\text{והוכחנו כי למשוואה } ax^2 + bx + c = 0$$

- יש שני פתרונות אם  $\Delta > 0$ .
- יש פתרון יחיד אם  $\Delta = 0$ .
- אין פתרונות אם  $\Delta < 0$ .

במקרים שבהם יש פתרונות למשוואה, הם נתונים על ידי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{במקרים אלה מתקיים הפירוק הבא:}$$

נוכל להיעזר בפירוק זה כדי לקבוע את סימן הביטוי  $ax^2 + bx + c$ :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{נבחר את סדר השורשים באופן הבא:}$$

$$x_1 < x_2 \quad \text{באופן זה יתקיים, במקרה ש- } \Delta > 0$$

נקבע את סימן הביטוי  $(x - x_1)(x - x_2)$ , בחלוקה למקרים:

- אם  $x < x_1 < x_2$  אז הגורמים  $x - x_1$ ,  $x - x_2$  שליליים ולכן  $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ .
- אם  $x_1 < x < x_2$  אז  $x - x_1$  חיובי ו- $x - x_2$  שלילי, ולכן  $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ .
- אם  $x_1 < x_2 < x$  אז הגורמים  $x - x_1$ ,  $x - x_2$  חיוביים ולכן  $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ .

בהתאם לכך, נקבע סימן הביטוי  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ :

| המכפלה<br>$ax^2 + bx + c$<br>$= a(x - x_1)(x - x_2)$ | הביטוי<br>$x - x_2$ | הביטוי<br>$x - x_1$ | המקרה           |              |
|------------------------------------------------------|---------------------|---------------------|-----------------|--------------|
| +                                                    | -                   | -                   | $x < x_1$       | כאשר $a > 0$ |
| -                                                    | -                   | +                   | $x_1 < x < x_2$ |              |
| +                                                    | +                   | +                   | $x > x_2$       |              |
| -                                                    | -                   | -                   | $x < x_1$       | כאשר $a < 0$ |
| +                                                    | -                   | +                   | $x_1 < x < x_2$ |              |
| -                                                    | +                   | +                   | $x > x_2$       |              |

כעת נתבונן במצב שבו  $\Delta = 0$ .

במצב זה מתקיים  $x_1 = x_2$ , ולכן

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)^2$$

מתקיים תמיד  $(x - x_1)^2 \geq 0$ , ולכן, במקרה ש- $a > 0$ , מתקיים לכל  $x$  ממשי:

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

למשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  יש במקרה זה פתרון יחיד והוא  $x_1$ . לכן לכל  $x \neq x_1$  מתקיים

$$ax^2 + bx + c > 0$$

באופן דומה, אם  $a < 0$  ו- $\Delta = 0$  אז לכל  $x$  ממשי מתקיים  $ax^2 + bx + c \leq 0$ , ולכל  $x \neq x_1$  מתקיים  $ax^2 + bx + c < 0$ .

נתבונן, לבסוף, במצב שבו  $\Delta < 0$ . כידוע, במצב זה למשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  אין פתרונות כלל.

נבטא את  $ax^2 + bx + c$  בשיטת ההשלמה לריבוע (כפי שעשינו כשפיתחנו את נוסחת השורשים של המשוואה הריבועית):

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

נזכור כי

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \right) \\
 &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0, \quad \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$$

נשים לב שמתקיים:

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} > 0$$

ולכן,

לכן, אם  $a > 0$  אז  $ax^2 + bx + c > 0$  לכל  $x$  ממשי,

ואם  $a < 0$  אז  $ax^2 + bx + c < 0$  לכל  $x$  ממשי.

נסכם את ממצאינו כך:

היו  $a, b, c$  מספרים ממשיים, כך ש-  $a \neq 0$ , ונסמן  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- אם  $\Delta \geq 0$  אז שורשי המשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  נתונים על ידי נוסחת השורשים

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

וכידוע לכל  $x$  מתקיים

לפיכך ניתן לנתח את סימן הביטוי  $ax^2 + bx + c$  כסימן מכפלה, על ידי חלוקה למקרים.

- אם  $\Delta < 0$  אז סימן הביטוי  $ax^2 + bx + c$  זהה לסימן של  $a$ , לכל  $x$  ממשי.

בדוגמאות הבאות נפתור אי-שוויונות ריבועיים:

$$2x^2 - 4x - 6 \geq 0$$

א. נתבונן באי-שוויון:

$$\frac{4 \pm \sqrt{64}}{4}$$

שורשי המשוואה  $2x^2 - 4x - 6 = 0$  הם

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

כלומר:

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x - x_1)(x - x_2) = 2(x + 1)(x - 3)$$

ביטוי זה הוא חיובי אם  $x < -1$  או  $x > 3$ .

האי-שוויון  $2x^2 - 4x - 6 \geq 0$  מתקיים אם  $2x^2 - 4x - 6 > 0$  או  $2x^2 - 4x - 6 = 0$

כלומר אם  $x \leq -1$  או  $x \geq 3$ .

קבוצת הפתרונות היא אפוא:  $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ .

ב. נתבונן באי־שוויון:  $\frac{5x+3}{x+1} > \frac{x-5}{4x+2}$

נשים לב כי לא ניתן להכפיל באלכסון, מפני שאיננו יודעים את סימני הביטויים שבמכנים. דרך פתרון אפשרית היא חלוקה למקרים על פי סימני ביטויים אלה,  $4x+2$  ו־ $x+1$ , אך דרך זו תהיה ארוכה ומייגעת. נציג כעת את דרך הפתרון הפשוטה והמומלצת:

נעביר אגפים –  $\Leftrightarrow \frac{5x+3}{x+1} - \frac{x-5}{4x+2} > 0$

נפשט את הביטוי שבאגף השמאלי:

$$\begin{aligned} \frac{5x+3}{x+1} - \frac{x-5}{4x+2} &= \frac{(5x+3)(4x+2) - (x+1)(x-5)}{(x+1)(4x+2)} \\ &= \frac{(20x^2 + 22x + 6) - (x^2 - 4x - 5)}{(x+1)(4x+2)} \\ &= \frac{19x^2 + 26x + 11}{(x+1)(4x+2)} \end{aligned}$$

נקבל אי־שוויון שקול:  $\Leftrightarrow \frac{19x^2 + 26x + 11}{(x+1)(4x+2)} > 0$

כעת נתבונן בביטוי שבמונה,  $19x^2 + 26x + 11$ . נחשב את הדיסקרימיננטה של ביטוי זה:

$$26^2 - 4 \cdot 19 \cdot 11 = 676 - 836 = -160$$

הדיסקרימיננטה שלילית, והמקדם של  $x^2$  חיובי, לכן מתקיים לכל  $x$ :

$$19x^2 + 26x + 11 > 0$$

המונה באגף השמאלי של האי־שוויון הוא חיובי תמיד. לפי חוקי הסימנים בחילוק, השבר כולו יהיה חיובי אם"ם המכנה חיובי גם כן. כלומר:

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x+2) > 0$$

נפתור אי־שוויון זה בדרך המוכרת של חלוקה למקרים על פי סימן הגורמים השונים.

מתקיים  $x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0$ , וכן  $x > -1/2 \Leftrightarrow 4x+2 > 0$ , ומתקבל הניתוח הבא:

| המקרה           | הביטוי $x+1$ | הביטוי $4x+2$ | המכפלה $(x+1)(4x+2)$ |
|-----------------|--------------|---------------|----------------------|
| $x < -1$        | –            | –             | +                    |
| $-1 < x < -1/2$ | +            | –             | –                    |
| $x > -1/2$      | +            | +             | +                    |

מניתוח זה נסיק ש- $(x+1)(4x+2) > 0$  אם  $x < -1$  או  $x > -1/2$ . כפי שראינו, תנאי זה שקול להתקיימותו של האי-שוויון המקורי. לכן קבוצת הפתרונות היא:

$$(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

### שאלה 20

האם וכיצד ישתנה הפתרון אם נחליף את האי-שוויון בדוגמה האחרונה באי-שוויון חלש?

$$\frac{5x+3}{x+1} \geq \frac{x-5}{4x+2}$$

במלים אחרות, פתרו את האי-שוויון הבא:

### שאלה 21

פתרו את האי-שוויונות הבאים:

$$א. \quad (x-2)^2 < 3x+12 \quad ב. \quad \frac{x-2}{3x-8} > \frac{x}{x+4}$$

### שאלה 22

מצאו עבור אילו ערכים של  $x$  מוגדר הביטוי הבא:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1+x-x^2}$$

## הערך המוחלט

בשיעור הראשון הגדרנו כך:

"הערך המוחלט של מספר הוא המספר ללא הסימן שלפניו".

הערך המוחלט של מספר ממשי  $a$  מסומן כך:  $|a|$ . הגדרתו הפורמלית הינה:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

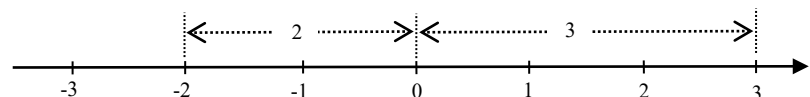
לדוגמה:

$$א. \quad |5| = 5, \text{ כי } 5 \geq 0.$$

$$ב. \quad |-5| = -(-5) = 5, \text{ כי } -5 < 0.$$

$$ג. \quad |0| = 0, \text{ כי } 0 \geq 0.$$

מבחינה גיאומטרית, הערך המוחלט של  $x$  מבטא את מרחק הנקודה  $x$ , שעל פני ציר המספרים הממשיים, מראשית הצירים. נתבונן, למשל, בנקודות  $x = 3$  ו- $x = -2$  על פני הציר.



המרחק שבין הנקודה  $x = 3$  לראשית המידה (ואכן:  $|3| = 3$ ).

המרחק שבין הנקודה  $x = -2$  לראשית המידה (ואכן:  $|-2| = 2$ ).

כפי שנראה עוד מעט, הערך המוחלט מאפשר לבטא מרחקים בין כל שתי נקודות על פני הישר. מכאן חשיבותו העיקרית.

נציג כעת כמה מהתכונות היסודיות של הערך המוחלט.

א. לכל  $a$  ממשי:  $|a| \geq 0$ .

הוכחה: אם  $a \geq 0$  אז  $|a| = a \geq 0$ .

אם  $a < 0$  אז לפי תכונת היפוך האי־שוויון,  $|a| = -a > 0$ .

בכל המקרים אכן מתקיים:  $|a| \geq 0$ .

ב. אם  $a \neq 0$  אז  $|a| > 0$ .

הוכחה: נבחן בנפרד את המקרים  $a > 0$ ,  $a < 0$ .

אם  $a > 0$  אז  $|a| = a > 0$ .

אם  $a < 0$  אז  $|a| = -a > 0$ .

בשני המקרים מתקיים:  $|a| > 0$ .

ג.  $|a| = 0$  אם ורק אם  $a = 0$ .

הוכחה: אם  $a = 0$  אז לפי ההגדרה,  $|a| = 0$ .

אם  $|a| = 0$  אז  $a = 0$ , כי לפי האמור בסעיף ב, לא ייתכן במקרה זה ש־ $a \neq 0$ .

ד. לכל  $a$  מתקיים:  $|a| = \sqrt{a^2}$ .

הוכחה: נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

מקרה 1:  $a > 0$ . במקרה זה,  $|a| = a$ . נוכיח שגם  $\sqrt{a^2} = a$ :

נתבונן במספר  $b = \sqrt{a^2}$ . לפי הגדרת השורש, המספר  $b$  אינו שלילי, והוא מקיים:

$$b^2 = a^2$$

לכן, כפי שהוכחנו בשיעור הקודם (טענה 3.4),  $b = a$  או  $b = -a$ . האפשרות  $b = -a$

לא תיתכן, כי  $a$  מספר חיובי, ולכן  $-a$  מספר שלילי. לכן  $b = a$ , כלומר:

$$\sqrt{a^2} = a = |a|$$

מקרה 2:  $a < 0$ . נסמן  $b = -a$ , אז  $b > 0$ . לפי מה שהוכחנו במקרה 1, מתקיים

$$b = \sqrt{b^2}$$

$$b^2 = (-a)^2 = (-1)^2 \cdot a^2 = a^2$$

מתקיים גם:

$$|a| = -a = b = \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2}$$

לכן:

מקרה 3:  $a = 0$ .

$$|a| = 0 = \sqrt{a^2}$$

במקרה זה אכן מתקיים:

וידאנו שבכל המקרים מתקיים  $|a| = \sqrt{a^2}$ . □

כפי שניתן לראות, בהוכחת טענות על ערך מוחלט יש תועלת בהפרדה למקרים על פי סימן הביטוי שבתוך הערך המוחלט. הסיבה לכך נעוצה בהגדרת הערך המוחלט  $|a|$ , שבה מפרידים למקרים על פי סימן המספר  $a$ .

## שאלה 23

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. לכל  $a$  מתקיים:  $|a| = |-a|$ .ב. לכל  $a$  ו- $b$   $|a| = |b|$ , אם ורק אם  $a = \pm b$ .ג. לכל  $a$  ו- $b$   $|ab| = |a| \cdot |b|$  (תכונה זו נקראת: **כפליות הערך המוחלט**).ד. לכל  $a$   $|a^2| = |a|^2 = a^2$ .ה. לכל  $a$  ו- $b \neq 0$   $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$ .

התשובה בעמוד 267

## משוואות ואי-שוויונות עם ערכים מוחלטים

בדומה להוכחת זהויות, גם בפתרון משוואות ואי-שוויונות המערבים ערך מוחלט, יש תועלת בהפרדה למקרים על פי סימן הביטויים שבערך המוחלט. נראה זאת בדוגמאות הבאות:

א. נפתור את המשוואה

$$|x| = 2x + 2$$

נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

1.  $x \geq 0$ : במקרה זה מתקיים, לפי הגדרת הערך המוחלט,  $|x| = x$ .

$$\Leftrightarrow x = 2x + 2 \quad \text{לכן המשוואה שקולה ל:}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{לאחר העברת אגפים נקבל:}$$

הערך  $x = -2$  לא מקיים  $x \geq 0$ . לכן במקרה זה אין פתרון למשוואה.2.  $x < 0$ : במקרה זה מתקיים  $|x| = -x$ , ולכן המשוואה שקולה ל:

$$\Leftrightarrow -x = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow -3x = 2 \quad \text{לאחר העברת אגפים נקבל:}$$

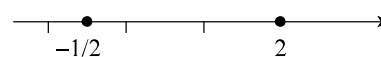
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

קיבלנו שהפתרון היחיד המקיים  $x < 0$  הוא  $x = -2/3$ .

כעת נאחד את הפתרונות שקיבלנו בשני המקרים ונקבל שהפתרון היחיד של המשוואה הוא  $x = -2/3$ .

ב. נפתור את האי-שוויון הבא:

$$|2x + 1| + |x - 2| \leq 3$$

נתבונן בביטויים שבתוך סימני הערך המוחלט. הביטוי  $2x + 1$  מתאפס כאשר  $x = -1/2$ ,והביטוי  $x - 2$  מתאפס כאשר  $x = 2$ . נציין נקודות אלה על פני הישר:בהתאם לכך, נחלק למקרים על פי מיקום הנקודה  $x$  ביחס לנקודות אלה.



**מקרה 1:**  $x < -1/2$ . במקרה זה מתקיים  $2x + 1 < 0$  וגם  $x - 2 < 0$ . לכן האי-שוויון

$$\Leftrightarrow -(2x + 1) + (-(x - 2)) \leq 3 \quad \text{שקול ל:}$$

$$\Leftrightarrow -(2x + 1) - (x - 2) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -2x - 1 - x + 2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -3x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -3x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

האי-שוויון מתקיים (במקרה זה) עבור  $-2/3 \leq x < -1/2$ .

שימו לב שכיוון האי-שוויון  
התהפך בעקבות החילוק במספר  
השלילי -3.

**מקרה 2:**  $-1/2 \leq x \leq 2$ . במקרה זה מתקיים  $2x + 1 \geq 0$  ו-  $x - 2 \leq 0$ . לכן האי-שוויון

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + (-(x - 2)) \leq 3 \quad \text{שקול ל:}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 - x + 2 \leq 3 \Leftrightarrow x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 0$$

האי-שוויון מתקיים (במקרה זה) עבור  $-1/2 \leq x \leq 0$ .

**מקרה 3:**  $x > 2$ . במקרה זה מתקיים  $2x + 1 > 0$  ו-  $x - 2 > 0$ . לכן האי-שוויון שקול ל:

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + (x - 2) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 3x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

אך לא ייתכן שיתקיים  $x \leq 4/3$  וגם  $x > 2$ . לכן במקרה זה אין פתרונות לאי-שוויון.

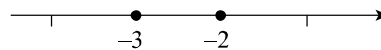
מאיחוד הפתרונות שבכל המקרים מתקבל שקבוצת הפתרונות של האי-שוויון היא

$$\{x \mid -2/3 \leq x \leq 0\}, \text{ כלומר הקטע } [-2/3, 0].$$

ג. נוכיח את האי-שוויון הבא:  $|x + 2| - |x + 3| \leq 1$

נקודות ההתאפסות של הביטויים בתוך הערכים המוחלטים הן  $x = -2$  (הנקודה שבה

$$x + 2 = 0) \text{ ו- } x = -3 \text{ (הנקודה שבה } x + 3 = 0).$$



נתבונן, בהתאם, במקרים הבאים:

**מקרה 1:**  $x < -3$ . במקרה זה מתקיים  $x + 2 < 0$  וגם  $x + 3 < 0$ . לכן:

$$|x + 2| - |x + 3| = -(x + 2) - (-(x + 3)) = -(x + 2) + (x + 3) = 1$$

במקרה זה מתקיים שוויון של ממש,  $|x + 2| - |x + 3| = 1$ , ובפרט מתקיים האי-שוויון המבוקש.

**מקרה 2:**  $-3 \leq x \leq -2$ . במקרה זה מתקיים  $x + 3 \geq 0$  ו-  $x + 2 \leq 0$ . לכן:

$$|x + 2| - |x + 3| = -(x + 2) - (x + 3) = -5 - 2x$$

לכן נוכל להציג שקילות:

$$|x+2| - |x+3| \leq 1 \Leftrightarrow -5 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow -2x \leq 6 \Leftrightarrow x \geq -3$$

מכיוון ש- $x \geq -3$  מתקיים במקרה זה, מתקיים גם  $|x+2| - |x+3| \leq 1$ .

**מקרה 3:**  $x > -2$ . במקרה זה מתקיים  $x+2 > 0$  ו- $x+3 > 0$ , ולכן

$$|x+2| - |x+3| = (x+2) - (x+3) = -1$$

במקרה זה מתקיים אי-שוויון חזק  $|x+2| - |x+3| < 1$ , ובפרט, מתקיים האי-שוויון המבוקש.

הוכחנו שבכל המקרים מתקיים האי-שוויון  $|x+2| - |x+3| \leq 1$ . לכן הוא נכון תמיד.  $\square$

## שאלה 24

$$\frac{x}{|5x+3|} = x+1$$

א. פתרו את המשוואה:

$$|x+5| \leq |x+3|$$

ב. פתרו את האי-שוויון:

$$|5-x| = 8$$

ג. פתרו את המשוואה:

$$|x+5| + |x-3| \geq 8$$

ד. הוכיחו כי לכל  $x$  מתקיים:

התשובה בעמוד 268

## אי-שוויון המשולש (עבור הערך המוחלט)

נציג עתה תכונה מרכזית של הערך המוחלט, הנקראת **אי-שוויון המשולש**:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

לכל זוג מספרים ממשיים  $a$  ו- $b$  מתקיים

בהמשך תובן הסיבה לשם של אי-שוויון זה. כעת, נוכיח אותו.

### הוכחה:

נשים לב, תחילה, לאי-שוויון הבא: (1)  $a \leq |a|$

אי-שוויון זה קל להוכחה:

אם  $a \geq 0$  אז  $|a| = a$  ובפרט  $a \leq |a|$ .

אם  $a < 0$  אז  $|a| = -a$ , ולכן שוב  $a \leq |a|$ .

$$b \leq |b|$$

באותו האופן נקבל

$$(2) \quad a+b \leq |a| + |b|$$

נסכם את שני האי-שוויונות:

$$-a \leq |-a|$$

אם נציב באי-שוויון (1)  $-a$  במקום  $a$ , נקבל:

$$-a \leq |a|$$

אבל  $|-a| = |a|$  ולכן

$$-b \leq |b|$$

באותו האופן נקבל

$$(3) \quad -(a+b) \leq |a| + |b|$$

נסכם ונקבל:

כעת נתבונן במקרים הבאים, לפי סימנו של הסכום  $a+b$ :

מקרה א:  $a+b \geq 0$ . במקרה זה  $|a+b| = a+b$ , ולפי (2),  $|a+b| \leq |a| + |b|$

מקרה ב:  $a + b < 0$ . במקרה זה  $|a + b| = -(a + b)$ , ולפי (3),  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .  
קיבלנו שבכל המקרים מתקיים אי־שוויון המשולש.

□

בתרגילים הבאים נלמד כיצד להוכיח מסקנות מאי־שוויון המשולש.

## שאלה 25

הוכיחו:

א.  $|a - b| \leq |a| + |b|$

ב.  $|5a - 3b| \leq 5|a| + 3|b|$

ג.  $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

ד.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

הדרכה: בסעיף ד הפרידו למקרים לפי  $|a| - |b| \geq 0$  ו  $|a| - |b| < 0$ .

התשובה בעמוד 270

## שאלה 26

הוכיחו בעזרת אי־שוויון המשולש:  $||x + 2| - |x + 3|| \leq 1$ .

(הערה: בדוגמה קודמת ראינו איך להוכיח טענה זו בעזרת חלוקה למקרים. אי־שוויון המשולש מאפשר הוכחה ללא חלוקה למקרים).

התשובה בעמוד 271

## שאלה 27

בדקו לגבי כל אי־שוויון אם הוא מתקיים תמיד או לא. (אם הוא מתקיים – הוכיחו; אם לא – תנו דוגמה להצבה של ערכים שעבורה אינו מתקיים; סוג כזה של שאלה נקרא 'הוכיחו או הפריכו').

א.  $-|x| \leq x \leq |x|$

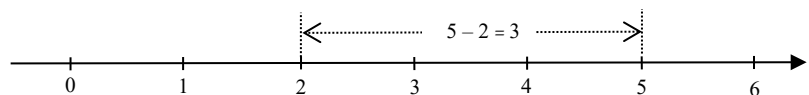
ב.  $|x - y| \leq x + y$

ג.  $2|xy| \leq x^2 + y^2$

התשובה בעמוד 271

## מרחק בין נקודות על הישר

אם נתבונן בשתי הנקודות  $a = 5$  ו  $b = 2$  על ציר המספרים הממשיים, נראה שהמרחק ביניהן הוא 3 יחידות מידה. כדי להגיע מ-2 ל-5 יש להוסיף ל-2 את המספר 3, שהוא ההפרש בין שני המספרים.



כללית יותר, לכל שתי נקודות  $a$  ו  $b$  על הישר, שעבורן מתקיים  $a > b$ , המרחק בין הנקודות הוא  $a - b$ . אך מה יהיה המרחק במקרים שבהם  $a < b$ ? באופן סימטרי, יהיה עלינו לחשב את ההפרש בין המספר הגדול מבין השניים והמספר הקטן. המרחק יהיה אפוא  $b - a$ .

הערך המוחלט מאפשר לנו לכתוב נוסחה אחת, התקפה בכל המקרים.  
המרחק בין הנקודות  $a$  ו- $b$ , המסומן  $d(a, b)$ , נתון על ידי הנוסחה הבאה:

$$d(a, b) = |a - b|$$

נוודא את נכונותה של הנוסחה:

אם  $a \geq b$ , אז  $a - b \geq 0$  ולכן (לפי הגדרת הערך המוחלט),  $|a - b| = a - b$

אם  $a < b$ , אז  $a - b < 0$  ולכן (לפי הגדרת הערך המוחלט),

$$|a - b| = -(a - b) = b - a$$

הנה כמה מתכונותיו הבסיסיות של המרחק:

1. אי־שליליות: לכל  $a, b$  מתקיים  $d(a, b) \geq 0$ .

2.  $d(a, b) = 0$  אם ורק אם  $a = b$ .

3. סימטריה: לכל  $a, b$  מתקיים  $d(a, b) = d(b, a)$ .

## שאלה 28

הוכיחו את התכונות 1–3 לעיל, כמסקנה מתכונות הערך המוחלט.

התשובה בעמוד 272

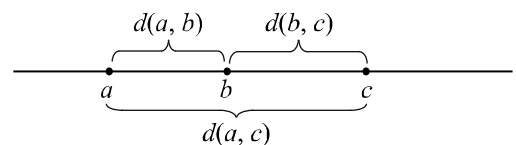
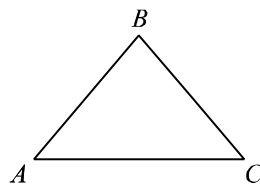
## אי־שוויון המשולש (עבור המרחק)

נעבור לתכונה חשובה של המרחק, הנקראת גם בשם **אי־שוויון המשולש**:

לכל 3 נקודות  $a, b, c$  על הישר,  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$  (1)

כדי להסביר את הקשר בין אי־שוויון זה לבין משולשים, נתבונן במשולש  $ABC$  כלשהו במישור. אורך כל צלע במשולש קטן מסכום אורכי שתי הצלעות האחרות. לכן, המרחק בין  $A$  ל- $C$  קטן מסכום המרחקים, מ- $A$  ל- $B$  ומ- $B$  ל- $C$ .

כשמדובר בנקודות על הישר, מתקיים אי־שוויון דומה, והוא האי־שוויון (1). בניגוד למשולשים, שבהם תמיד מתקיים אי־שוויון חזק, כשמדובר בנקודות על הישר האי־שוויון הוא חלש, ואכן יכול להתקיים שוויון: למשל המרחק של 1 מ-5 שווה למרחק של 1 מ-2 ועוד המרחק של 2 מ-5.



**הוכחת האי-שוויון (1):**

נבטא את האי-שוויון (1), באופן שקול, בעזרת הערך המוחלט:

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

כדי להוכיח תכונה זו, נבטא את ההפרש  $a - c$  כך:

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

לפי אי-שוויון המשולש (עבור הערך המוחלט), מתקיים:

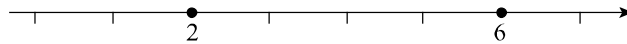
$$\square \quad |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|$$

ההבנה הגיאומטרית יכולה לסייע, במקרים מסוימים, בפתרון ובהוכחה של אי-שוויונות עם ערכים מוחלטים.

נתבונן, לדוגמה, באי-שוויון הבא:

$$(2) \quad |x - 2| < |x - 6|$$

ניתן לפתור אי-שוויון זה בחלוקה למקרים כפי שראינו בעבר, אך יש פתרון גיאומטרי פשוט יותר. נתבונן בנקודות 2 ו-6 על פני הישר:



באגף השמאלי רשום המרחק של הנקודה  $x$  מהנקודה 2, ובאגף הימני רשום מרחקה מהנקודה 6. משמעות האי-שוויון (2) הוא שהנקודה  $x$  קרובה יותר לנקודה 2 מאשר לנקודה 6. כעת נתבונן בנקודה 4 על פני הישר. נקודה זו נמצאת בדיוק באמצע בין הנקודות 2 ו-6:



במילים אחרות, נקודה זו נמצאת במרחק שווה משתי הנקודות 2 ו-6. כל נקודה שמשמאל לנקודה 4, תהיה קרובה יותר ל-2 מאשר ל-6, וכל נקודה שממימין לנקודה 4 תהיה קרובה יותר ל-6 מאשר ל-2.

$$\{x \mid x < 4\}$$

לכן, קבוצת הפתרונות של האי-שוויון (2) היא כלומר, הקטע  $(-\infty, 4)$ .

הערה: באופן כללי, הנקודה הנמצאת באמצע בין הנקודות  $a$  ו- $b$  היא הנקודה המתאימה למספר  $m = (a + b)/2$ . המספר  $m$  נקרא **הממוצע** של המספרים  $a$  ו- $b$ .

**שאלה 29**

הוכיחו שהנקודה  $m = (a + b)/2$  נמצאת במרחקים שווים מהנקודות  $a$  ו- $b$ .

התשובה בעמוד 272

## שאלה 30

פתרו באופן גיאומטרי את האי-שוויונות הבאים:

א.  $|x - 2| \leq |x - 1|$

ב.  $|x + 2| < |x + 6|$

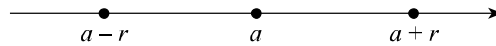
התשובה בעמוד 273

סוג נוסף של אי-שוויונות בעלי משמעות גיאומטרית, הם אי-שוויונות מהצורה הבאה:

$$|x - a| < r$$

באי-שוויון זה,  $a$  ו- $r$  הם פרמטרים (מייצגים מספרים קבועים):  $a$  מייצג מספר כלשהו, ו- $r$  מייצג מספר חיובי כלשהו.  $x$  הוא הנעלם. משמעות האי-שוויון הנתון היא שמרחק הנקודה  $x$  מהנקודה  $a$  קטן מ- $r$ .

כדי להבין את האי-שוויון נתבונן באיור הבא:



הנקודות  $a - r$  ו- $a + r$  נמצאות במרחק  $r$  מהנקודה  $a$ . כל נקודה הנמצאת מימין לנקודה  $a - r$  או משמאל לנקודה  $a + r$  נמצאת במרחק גדול יותר מ- $r$  מהנקודה  $a$ , וכל נקודה הנמצאת בין שתי הנקודות  $a - r$  ו- $a + r$  נמצאת במרחק קטן יותר מ- $r$  מהנקודה  $a$ .

לכן פתרון האי-שוויון  $|x - a| < r$  הוא הקבוצה הבאה:

$$\{x \mid a - r < x < a + r\}$$

כלומר, הקטע  $(a - r, a + r)$ .

נוכיח זאת באופן מתמטי:

## טענה

יהיו  $a, r$  מספרים ממשיים ונניח ש- $r > 0$ . אז  $|x - a| < r$  אם ורק אם  $a - r < x < a + r$ .

## הוכחה:

נפתור את האי-שוויון  $|x - a| < r$  בחלוקה לפי המקרים: א.  $x \geq a$ , ב.  $x < a$ .  
אם  $x \geq a$  אז  $x - a \geq 0$  ולכן  $|x - a| = x - a$ . במקרה זה האי-שוויון  $|x - a| < r$  שקול לכך ש- $x - a < r$ , וזה שקול לכך ש- $x < a + r$ .  
אם  $x < a$  אז  $x - a < 0$  ולכן  $|x - a| = -(x - a) = a - x$ . במקרה זה האי-שוויון  $|x - a| < r$  שקול לכך ש- $a - x < r$ , וזה שקול לכך ש- $x > a - r$ .

לכן  $|x - a| < r$  מתקיים בדיוק במקרים הבאים:  $a \leq x < a + r$  או  $a - r < x < a$ ,  
 כלומר בדיוק כאשר  $a - r < x < a + r$ .  $\square$

כדאי לשים לב במיוחד למקרה הפרטי של הטענה האחרונה, שבו  $a = 0$ :

### מסקנה

יהי  $r$  מספר ממשי חיובי.

אז  $|x| < r$  אם ורק אם  $-r < x < r$ .

לקבוצה מהצורה  $(a - r, a + r)$  נהוג לקרוא **סביבה** של הנקודה  $a$ , ו- $r$  נקרא **רדיוס הסביבה**. לסביבות יש חשיבות רבה בפיתוח תורת הגבולות, הנלמדת לעומק בקורס 'חשבון אינפיניטסימלי 1'. כדי להדגים במעט את סוג השאלות הקשורות לתורת הגבולות, נתבונן בשאלה הבאה:

יהי  $x$  מספר המקיים  $|x - 3| < 0.01$ . הוכיחו שמתקיים  $|x^2 - x - 6| < 0.08$ .

שימו לב: כאשר  $x = 3$ , מתקיים  $x^2 - x = 3^2 - 3 = 6$ . משמעות הטענה שבשאלה היא שעבור  $x$  שמרחקו מהנקודה 3 קטן מ-0.01, מרחקו של ערך הביטוי  $x^2 - x$  מ-6 קטן מ-0.08.

באופן לא מדויק ניתן לאמר שכאשר המספר  $x$  "קרוב" ל-3, המספר  $x^2 - x$  "קרוב" ל-6. במסגרת תורת הגבולות מגדירים תופעה זו במדויק, ומסמנים אותה כך:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - x = 6$$

כלומר, גבול הביטוי  $x^2 - x$ , כאשר  $x$  הולך ומתקרב ל-3, הוא 6.

נחזור לפתרון השאלה.

נציג תחילה,  $3^2 - 3 = 6$ . לכן,

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= x^2 - x - (3^2 - 3) = (x^2 - 3^2) - (x - 3) \\ &= (x + 3)(x - 3) - (x - 3) \end{aligned}$$

כעת ניעזר באי־שוויון המשולש:

$$\begin{aligned} |x^2 - x - 6| &= |(x + 3)(x - 3) - (x - 3)| \leq |(x + 3)(x - 3)| + |x - 3| \\ &= |x + 3| \cdot |x - 3| + |x - 3| \end{aligned}$$

כדי לקבל הערכה על הביטוי  $|x + 3|$ , ניעזר בנתון ש- $|x - 3| < 0.01$ . מנתון זה נובע ש- $3 - 0.01 < x < 3 + 0.01$ . מכאן נקבל ש- $5.99 < x + 3 < 6.01$ , ובוודאי  $0 < x + 3 < 7$ , ולכן  $|x + 3| = x + 3 < 7$ . מכאן:

$$|x^2 - x - 6| \leq |x + 3| \cdot |x - 3| + |x - 3| < 7 \cdot 0.01 + 0.01 = 0.08$$

הוכחנו את האי־שוויון המבוקש,  $|x^2 - x - 6| < 0.08$ .

## שאלה 31

- א. הוכיחו שאם  $|x - 5| < 0.01$  אז  $|x^2 - 3x - 10| < 0.14$ .  
 ב. הוכיחו שאם  $|x + 3| < 0.1$  אז  $|x^2 - 9| < 0.7$ .

התשובה בעמוד 273

## סיכום שיעור 4

בשיעור זה למדנו על יחס הסדר במספרים הממשיים, על תכונותיו ועל כללי ההיסק הקשורים אליו. למדנו איך לפתור ואיך להוכיח אי־שוויונות מסוגים שונים, ובמיוחד אי־שוויונות לינאריים וריבועיים. הכרנו את הערך המוחלט והמרחק, ולמדנו כללים להוכחה ולפתרון של אי־שוויונות הקשורים אליהם.

בדומה למה שראינו בשיעורים הקודמים, התיאוריה כולה מתבססת על מספר קטן של חוקים יסודיים. מחוקים אלה נגזרים חוקים נוספים, והבנת הדרך שבה נובעים החוקים זה מזה מקלה מאוד על הבנתם ועל זכירתם.

הבסיס שרכשתם בארבעת השיעורים האחרונים הוא נרחב וחשוב. ככל שתחזרו ותלמדו אותו, וכן תתרגלו פתרון של שאלות הקשורות אליו, כך תיווכחו בפשטות הדברים, תצברו ביטחון ותחזקו את יכולת החשיבה המתמטית שלכם.



## שאלות להערכה עצמית

## שאלה 32

פתרו את האי־שוויונות הבאים:

א.  $(x-3)^2 < (x-5)(x+1)$

ב.  $\frac{x}{x-1} \leq 3$

ג.  $\frac{12x^2 - 9x + 7}{5x^2 - 7x + 2} < 2$

ד.  $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$

ה.  $\frac{x}{x-1} > \frac{2x}{x-2}$

ו.  $x \geq 7\sqrt{x} - 12$

ז.  $|x| \leq 5x + 2$

ח.  $|x^2 + 2x| < 8$

התשובה בעמוד 274

## שאלה 33

פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $|x-2| + |x+2| = 4$

ב.  $|x-2| - |x+2| = 10$

התשובה בעמוד 278

## שאלה 34

הוכיחו את הכללים הבאים, עבור  $a, b, c, d$  מספרים אי־שליליים:

א. הכפלת אי־שוויונות אי־שליליים:

אם  $a > b$  וגם  $c > d$  אז  $ac > bd$ .

ב. העלאת אי־שוויונות אי־שליליים בריבוע:

(i) אם  $a > b$  אז  $a^2 > b^2$ .(ii) אם  $a \geq b$  אז  $a^2 \geq b^2$ .

ג. הוצאת שורש מאי־שוויונות אי־שליליים:

(i) אם  $a > b$  אז  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ .(ii) אם  $a \geq b$  אז  $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ .

הערה: במהלך השיעור הוכחנו את הכללים האלה עבור מספרים חיוביים. בשאלה זו אנו מרחיבים את תחולתם למספרים אי־שליליים.

התשובה בעמוד 279

## שאלה 35

הוכיחו כי לכל  $a, b \geq 0$  מתקיים:  $\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

התשובה בעמוד 280

## שאלה 36

הוכיחו כי אם  $|x-2| < 0.01$  אז  $|x^3 - x - 6| < 0.2$ .

התשובה בעמוד 281

## פתרונות לשאלות בשיעור 1

השאלה בעמוד 10

תשובה 1

$$\frac{1+2}{3} + 3 = 6 \quad \text{א.}$$

$$1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$\frac{4+17}{21} + 19 + 5 = 45 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{21}{40}$$

$$4 + 17 + 19 + 5 = 21 + 19 + 5 = 40 + 5 = 45$$

$$\frac{3+3}{6} + 3 = 9 \quad \text{ג.}$$

$$3 + 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

השאלה בעמוד 12

תשובה 2

$$\frac{2 \times 3}{6} \times 2 = 12 \quad \text{א.}$$

$$2 \times 3 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{4} = 8 \quad \text{ב.}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$$

$$\frac{2 \times 3}{6} \times 4 \times 5 = 120 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{6}{24}$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 6 \times 4 \times 5 = 24 \times 5 = 120$$

השאלה בעמוד 12

תשובה 3

$$1 + \frac{2 \times 3}{6} = 7 \quad \text{א.}$$

$$1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$$

$$\frac{4 \times 5}{20} + \frac{6 \times 7}{42} = 62 \quad \text{ב.}$$

$$4 \times 5 + 6 \times 7 = 20 + 42 = 62$$

$$\frac{1 \times 3}{3} + \frac{2 \times 2}{4} + \frac{4 \times 1}{4} = 11 \quad \text{ג.}$$

$$1 \times 3 + 2 \times 2 + 4 \times 1 = 3 + 4 + 4 = 11$$

$$\frac{2 \times 2}{4} + \frac{2 \times 2}{4} + \frac{3 \times 3 \times 3}{27} = 35 \quad \text{ד.}$$

$$2 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 4 + 4 + 27 = 35$$

השאלה בעמוד 13

תשובה 4

א.  $3 + 5 \times 6 = 3 + 30 = 33$

ב.  $(3 + 5) \times 6 = 8 \times 6 = 48$

ג.  $7 \times 4 + 4 = 28 + 4 = 32$

ד.  $2 + 3 \times 5 + 7 = 2 + 15 + 7 = 24$

ה.  $(1 + 3) \cdot (4 + 3) \cdot (2 + 2) = 4 \cdot 7 \cdot 4 = 28 \cdot 4 = 112$

ו.  $(1 + 2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 7 + 1 = (1 + 30) \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 31 \cdot 5 \cdot 7 + 1$   
 $= 155 \cdot 7 + 1 = 1086$

ז.  $1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot (1 + 2))) = 1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot 3))$   
 $= 1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot 7)$   
 $= 1 + 2 \cdot 15 = 31$

ח.  $2 \cdot 1 + (3 \cdot 2) + 5 \cdot (4 + 1) = 2 + 6 + 5 \cdot 5 = 8 + 25 = 33$

השאלה בעמוד 15

תשובה 5

א.  $(2 + 5) + 8 = 7 + 8 = 15$

$2 + (5 + 8) = 2 + 13 = 15$

$(2 + 5) + 8 = 2 + (5 + 8)$       אכן מתקיים:

ב.  $(4 + 1) + 1 = 5 + 1 = 6$

$4 + (1 + 1) = 4 + 2 = 6$

$(4 + 1) + 1 = 4 + (1 + 1)$       אכן מתקיים:

ג.  $(2 + 2) + 3 = 4 + 3 = 7$

$2 + (2 + 3) = 2 + 5 = 7$

$(2 + 2) + 3 = 2 + (2 + 3)$       אכן מתקיים:

השאלה בעמוד 15

תשובה 6

א.  $(5 \times 2) \times 6 = 10 \times 6 = 60$

$5 \times (2 \times 6) = 5 \times 12 = 60$

$(5 \times 2) \times 6 = 5 \times (2 \times 6)$       אכן מתקיים:

ב.  $(2 \times 2) \times 3 = 4 \times 3 = 12$

$2 \times (2 \times 3) = 2 \times 6 = 12$

$(2 \times 2) \times 3 = 2 \times (2 \times 3)$       אכן מתקיים:

## השאלה בעמוד 16

## תשובה 7

א. נכניס סוגריים בביטוי  $1 + 4 + 3$ :

$$(1 + 4) + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$1 + (4 + 3) = 1 + 7 = 8$$

ב. נכניס סוגריים בביטוי  $2 \times 5 \times 3$ :

$$(2 \times 5) \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

$$2 \times (5 \times 3) = 2 \times 15 = 30$$

ג. נכניס סוגריים בביטוי  $3 + 4 + 1 + 2$ :

$$(3 + 4) + (1 + 2) = 7 + 3 = 10$$

$$3 + (4 + (1 + 2)) = 3 + (4 + 3) = 3 + 7 = 10$$

$$(3 + (4 + 1)) + 2 = (3 + 5) + 2 = 8 + 2 = 10$$

ד. נכניס סוגריים בביטוי  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ :

$$(1 \times 2) \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$$

$$1 \times (2 \times (3 \times 4)) = 1 \times (2 \times 12) = 1 \times 24 = 24$$

$$((1 \times 2) \times 3) \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 6 \times 4 = 24$$

## השאלה בעמוד 17

## תשובה 8

$$9 + 4 - 3 = 13 - 3 = 10$$

$$10 - 2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$4 \times 3 - 1 = 12 - 1 = 11$$

$$15 - 2 - 3 - 2 = 13 - 3 - 2 = 10 - 2 = 8$$

$$100 - (10 - 2) \times 6 = 100 - 8 \times 6 = 100 - 48 = 52$$

$$(8 - 2) \times (8 + 2) = 6 \times 10 = 60$$

$$2 + 3 - 1 + 4 - 1 - 2 = 5 - 1 + 4 - 1 - 2 = 4 + 4 - 1 - 2 = 8 - 1 - 2 = 7 - 2 = 5$$

$$4 \times 2 + 5 - 7 = 8 + 5 - 7 = 13 - 7 = 6$$

## השאלה בעמוד 19

## תשובה 9

א. לפי כלל החלפת סדר המחסר והמחוסר:  $1 - 10 = -(10 - 1) = -9$ ב. לפי אותו הכלל:  $3 - 100 = -(100 - 3) = -97$ ג. כאן המחסר קטן מהמחוסר:  $201 - 102 = 99$ ד. לפי אותו הכלל:  $102 - 201 = -(201 - 102) = -99$ ה. לפי כלל חיסור מספר מעצמו:  $200 - 200 = 0$

## השאלה בעמוד 21

## תשובה 10

א.  $5 \times (-1) = -(5 \times 1) = -5$

ב.  $(-5) \times (-5) = 5 \times 5 = 25$

ג.  $6 \times 7 = 42$

ד.  $(-2) \times (-2) \times (-3) = ((-2) \times (-2)) \times (-3) = (2 \times 2) \times (-3) = 4 \times (-3) = -(4 \times 3) = -12$

ה. במכפלה זו אחד הגורמים הוא 0:  $9 \times 0 \times (-3) \times 4 = 0$

ו.  $(-1) \times 3 \times (-1) \times (-5) = (-3) \times (-1) \times (-5) = 3 \times (-5) = -15$

## השאלה בעמוד 23

## תשובה 11

א. לפי הכלל 'חיסור שקול לחיבור הנגדי':  $4 + (-1) = 4 - 1 = 3$

ב. לפי אותו הכלל:  $4 + (-5) = 4 - 5$   
לפי כלל החלפת המחסר והמחוסר:  $= -(5 - 4) = -1$

ג. לפי הכלל 'הנגדי לסכום שווה לסכום הנגדיים':  
 $(-6) + (-8) = -(6 + 8) = -14$

ד. לפי הכלל 'חיסור שקול לחיבור הנגדי':  $0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

ה. לפי אותו הכלל:  $-3 - (-5) = -3 + 5$   
לפי חוק החילוף בחיבור:  $= 5 + (-3)$   
שוב לפי הכלל 'חיסור שקול לחיבור הנגדי':  $= 5 - 3 = 2$

ו. לפי הכלל 'חיסור שקול לחיבור הנגדי':  $-7 - (-4) = -7 + 4$   
לפי חוק החילוף בחיבור:  $= 4 + (-7)$   
שוב לפי הכלל 'חיסור שקול לחיבור הנגדי':  $= 4 - 7$   
לפי כלל החלפת המחסר והמחוסר:  $= -(7 - 4) = -3$

ז. לפי כלל החלפת המחסר והמחוסר:  $7 - 12 = -(12 - 7) = -5$

ח. לפי הכלל 'חיבור 0 למספר אינו משנה את ערכו':  $0 + 4 = 4 + 0 = 4$

ט. לפי הגדרת סדר הפעולות בחיבור וחיסור:  $11 - 12 - 13 = (11 - 12) - 13$   
לפי כלל החלפת המחסר והמחוסר:  $= -(12 - 11) - 13$   
לפי הכלל 'חיסור שקול לחיבור הנגדי':  $= -1 + (-13)$   
לפי הכלל 'הנגדי לסכום שווה לסכום הנגדיים':  
 $= -(1 + 13) = -14$

י. לפי הגדרת סדר הפעולות בחיבור וחסור:

$$12 + (-1) - (-2) = (12 + (-1)) - (-2)$$

לפי הכלל 'חסור שקול לחיבור הנגדי':

$$= (12 - 1) - (-2) = 11 - (-2)$$

$$= 11 + 2 = 13 \quad \text{שוב לפי אותו כלל,}$$

השאלה בעמוד 23

## תשובה 12

א.  $2 - 3 \times 4 = 2 - 12 = -(12 - 2) = -10$

ב.  $5 - 2 \times (-4) = 5 - (-8) = 5 + 8 = 13$

ג.  $(13 - 2) \cdot (13 - 4) \cdot (15 - 5 - 10) = 11 \cdot 9 \cdot 0 = 0$

ד.  $(5 - 2) \cdot (5 - 3) \cdot (5 - 6) = 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 6 \cdot (-1) = -6$

ה.  $2 - 3 - 4 + 5 - 6 - 8 = (-1) - 4 + 5 - 6 - 8 = (-5) + 5 - 6 - 8$   
 $= 0 - 6 - 8 = (-6) - 8 = (-6) + (-8)$   
 $= -(6 + 8) = -14$

ו.  $-1 - 2 - 3 - 4 = -3 - 3 - 4 = -6 - 4 = -10$

הערה: ניתן לחשב ביטוי זה גם כך:

$$\begin{aligned} -1 - 2 - 3 - 4 &= (-1) + (-2) + (-3) + (-4) \\ &= -(1 + 2 + 3 + 4) = -10 \end{aligned}$$

לפי הכלל 'הנגדי לסכום שווה לסכום הנגדיים'. כלל זה תקף גם בחיבור של יותר משני מספרים.

ז.  $2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 8 - 18 = -10$

ח.  $((1 - 3) \cdot (1 - 4) \cdot (1 - 5) - 7) \cdot (-2) \cdot (-3)$   
 $= ((-2) \cdot (-3) \cdot (-4) - 7) \cdot (-2) \cdot (-3) = (-24 - 7) \cdot (-2) \cdot (-3)$   
 $= (-31) \cdot (-2) \cdot (-3) = 62 \cdot (-3) = -186$

השאלה בעמוד 25

## תשובה 13

א.  $2 = 9 : 18$ . נוודא:  $2 \times 9 = 18$ .

ב.  $3 = 9 : 3$ . נוודא:  $3 \times 3 = 9$ .

ג. נחלק בשיטת החילוק הארוך:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 1260 \overline{) 35} \\ \underline{105} \phantom{0} \\ 210 \\ \underline{210} \\ 0 \end{array}$$

קיבלנו כי:  $36 = 1260 : 35$ . בשיטת הכפל הארוך ניתן לוודא ש-  $35 \times 36 = 1260$ .

ד.  $16 : 16 = 1$ . נוודא:  $1 \times 16 = 16$ .

ה.  $4/1 = 4$ . נוודא:  $1 \times 4 = 4$ .

ו.  $100/10 = 10$ . נוודא:  $10 \times 10 = 100$ .

השאלה בעמוד 26

#### תשובה 14

| סעיף | מחולק | מחלק | מנה שלמה | שארית | בדיקה                      |
|------|-------|------|----------|-------|----------------------------|
| א    | 9     | 2    | 4        | 1     | $9 = 4 \times 2 + 1$       |
| ב    | 21    | 3    | 7        | 0     | $21 = 7 \times 3 + 0$      |
| ג    | 100   | 7    | 14       | 2     | $100 = 14 \times 7 + 2$    |
| ד    | 90    | 6    | 15       | 0     | $90 = 15 \times 6 + 0$     |
| ה    | 1000  | 13   | 76       | 12    | $1000 = 76 \times 13 + 12$ |

השאלה בעמוד 29

#### תשובה 15

נרחיב ב' 2, ב' 3, וב' 4:

א.  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$

ב.  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

ג.  $\frac{7}{2} = \frac{14}{4} = \frac{21}{6} = \frac{28}{8}$

ד.  $\frac{22}{14} = \frac{44}{28} = \frac{66}{42} = \frac{88}{56}$

השאלה בעמוד 30

#### תשובה 16

א.  $\frac{16}{18} = \frac{16 : 2}{18 : 2} = \frac{8}{9}$

ב.  $\frac{5}{100} = \frac{5 : 5}{100 : 5} = \frac{1}{20}$

ג.  $\frac{63}{7} = \frac{63 : 7}{7 : 7} = \frac{9}{1} = 9$

ד.  $\frac{30}{18} = \frac{30 : 2}{18 : 2} = \frac{15}{9} = \frac{15 : 3}{9 : 3} = \frac{5}{3}$

ה.  $20/21$  הוא שבר מצומצם.

ו.  $\frac{15}{18} = \frac{15 : 3}{18 : 3} = \frac{5}{6}$

ז.  $\frac{70}{42} = \frac{70 : 2}{42 : 2} = \frac{35}{21} = \frac{35 : 7}{21 : 7} = \frac{5}{3}$

ח.  $1/10$  הוא שבר מצומצם.

השאלה בעמוד 31

תשובה 17

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5} \quad \text{א.}$$

$$\frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8+4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{2}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{2+3+4}{11} = \frac{9}{11} \quad \text{ו.}$$

השאלה בעמוד 34

תשובה 18

א. נחבר  $3/5 + 4/7$ :

נבחר במכנה המשותף 35 (מכפלת המכנים).

גורם ההרחבה של  $3/5$  הוא  $35 : 5 = 7$ , וגורם ההרחבה של  $4/7$  הוא  $35 : 7 = 5$ .

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}, \quad \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35} \quad \text{נרחיב:}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{41}{35} \quad \text{נחבר:}$$

ב. נחבר  $3/10 + 1/14$ :נבחר במכנה המשותף 70. גורם ההרחבה של  $3/10$  הוא 7, וגורם ההרחבה של  $1/14$  הוא

5.

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{14} = \frac{3 \cdot 7}{10 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 5}{14 \cdot 5} = \frac{21}{70} + \frac{5}{70} = \frac{26}{70} = \frac{13}{35}$$

ג. נחבר  $8/5 + 7/10$ :

נבחר במכנה המשותף 10.

$$\frac{8}{5} + \frac{7}{10} = \frac{16}{10} + \frac{7}{10} = \frac{23}{10}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{20}{3} + \frac{20}{4} = \frac{80}{12} + \frac{60}{12} = \frac{140}{12} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} \quad \text{ה.}$$

ו. כדי להקל את המשימה נצמצם תחילה את השברים שבסכום.

$$\frac{2}{18} + \frac{2}{16} = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 8}{9 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{8}{72} + \frac{9}{72} = \frac{17}{72}$$



## השאלה בעמוד 34

## תשובה 19

א. נרחיב למכנה המשותף 12:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$$

ב. נעבור לצורת הכתיבה המקוצרת שהוצגה:

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{3} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 4}{15} = \frac{9 + 25 + 4}{15} = \frac{38}{15}$$

$$\frac{8}{7} + \frac{12}{5} + \frac{15}{2} = \frac{10 \cdot 8 + 14 \cdot 12 + 35 \cdot 15}{70} = \frac{80 + 168 + 525}{70} = \frac{773}{70} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{15} + \frac{9}{4} = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 15 \cdot 9}{60} = \frac{18 + 16 + 135}{60} = \frac{169}{60} \quad \text{ד.}$$

## השאלה בעמוד 37

## תשובה 20

א. נחלק עם שארית:

$$8 = 2 \cdot 3 + 2$$

$$\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3} \quad \text{לכן}$$

$$\frac{19}{5} = \frac{15+4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5} \quad \text{ב. } 19 = 3 \cdot 5 + 4, \text{ ולכן}$$

$$\frac{100}{7} = 14\frac{2}{7} \quad \text{ג. } 100 = 14 \cdot 7 + 2, \text{ לכן}$$

$$\frac{200}{17} = 11\frac{13}{17} \quad \text{ד. } 200 = 11 \cdot 17 + 13, \text{ לכן}$$

הערה: את כל תוצאות החלוקה עם שארית ניתן לקבל בשיטת החילוק הארוך.

## השאלה בעמוד 37

## תשובה 21

א.  $20/3$  הוא שבר מדומה (המונה אינו קטן מהמכנה).

$$\frac{20}{3} = \frac{6 \cdot 3 + 2}{3} = 6\frac{2}{3} \quad \text{נציג אותו כמספר מעורב:}$$

ב.  $2/3$  הוא שבר פשוט (המונה קטן מהמכנה).

$$\frac{100}{9} = \frac{11 \cdot 9 + 1}{9} = 11\frac{1}{9} \quad \text{ג. } 100/9 \text{ הוא שבר מדומה. נציג אותו כמספר מעורב:}$$

$$\frac{42}{6} = 7 \quad \text{ד. } 42/6 \text{ הוא שבר מדומה, והוא שווה למספר שלם:}$$

ה.  $13/15$  הוא שבר פשוט.

$$\frac{20}{20} = 1 \quad \text{ו. } 20/20 \text{ הוא שבר מדומה, והוא שווה למספר שלם:}$$

ז.  $80/24$  הוא שבר מדומה. נצמצם אותו ונציג כמספר מעורב:

$$\frac{80}{24} = \frac{80 : 8}{24 : 8} = \frac{10}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

## 183 פתרונות לשאלות בשיעור 1

השאלה בעמוד 37

תשובה 22

$$1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{א.}$$

$$3\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{3}{1} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{ב.}$$

$$14\frac{5}{7} = 14 + \frac{5}{7} = \frac{14}{1} + \frac{5}{7} = \frac{98}{7} + \frac{5}{7} = \frac{103}{7} \quad \text{ג.}$$

$$5\frac{3}{100} = 5 + \frac{3}{100} = \frac{5}{1} + \frac{3}{100} = \frac{500}{100} + \frac{3}{100} = \frac{503}{100} \quad \text{ד.}$$

$$12 = \frac{12}{1} \quad \text{ה.}$$

השאלה בעמוד 37

תשובה 23

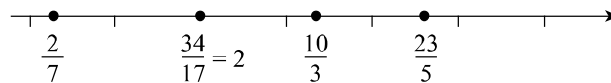
$$1\frac{1}{2} + 4\frac{2}{5} = \frac{3}{2} + \frac{22}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 22}{10} = \frac{59}{10} = \frac{50 + 9}{10} = 5\frac{9}{10} \quad \text{א.}$$

$$11\frac{2}{3} + 14\frac{3}{4} = \frac{35}{3} + \frac{59}{4} = \frac{4 \cdot 35 + 3 \cdot 59}{12} = \frac{317}{12} = 26\frac{5}{12} \quad \text{ב.}$$

$$5\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{16}{3} + \frac{1}{8} = \frac{8 \cdot 16 + 3 \cdot 1}{24} = \frac{131}{24} = 5\frac{11}{24} \quad \text{ג.}$$

השאלה בעמוד 38

תשובה 24



השאלה בעמוד 40

תשובה 25

$$\frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4} \quad \text{א.}$$

$$\frac{0}{10} = 0 \quad \text{ד.} \quad \frac{-9}{2} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2}{-1} = -\frac{2}{1} = -2 \quad \text{ו.} \quad \frac{-15}{3} = -\frac{15}{3} = -5 \quad \text{ה.}$$

$$\frac{90}{-17} = -\frac{90}{17} = -5\frac{5}{17} \quad \text{ח.} \quad \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{ז.}$$

השאלה בעמוד 41

תשובה 26

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 3 - 4 \cdot 1}{20} = \frac{11}{20} \quad \text{א.}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{10} = \frac{10 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{30} = \frac{17}{30} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 3 - 4 \cdot 5}{12} = \frac{-11}{12} = -\frac{11}{12} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{6}{10} - \frac{9}{15} = \frac{3 \cdot 6 - 2 \cdot 9}{30} = \frac{0}{30} = 0 \quad \text{ד.}$$

$$6 - \frac{2}{3} = \frac{6}{1} - \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 6 - 1 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{1} = \frac{1 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{4} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4} \quad \text{ו.}$$

$$1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 9}{4} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4} \quad \text{ז.}$$

$$8 - 3\frac{1}{3} = \frac{8}{1} - \frac{10}{3} = \frac{3 \cdot 8 - 1 \cdot 10}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \quad \text{ח.}$$

השאלה בעמוד 42

## תשובה 27

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{-5} = \frac{2}{3} - \frac{-1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{-3}{15} = \frac{10 - (-3)}{15} = \frac{13}{15} \quad \text{א.}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{-5} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{15} = \frac{13}{15} \quad \text{דרך נוספת:}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{-3} = \frac{-1}{2} + \frac{-2}{3} = \frac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2)}{6} = \frac{-7}{6} = -1\frac{1}{6} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{-3}{-4} + \frac{9}{-2} = \frac{3}{4} + \frac{-9}{2} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot (-9)}{4} = \frac{3 + (-18)}{4} = \frac{-15}{4} = -3\frac{3}{4} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} - \frac{8}{7} - \frac{2}{3} &= \left(\frac{4}{9} - \frac{8}{7}\right) - \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 4 - 9 \cdot 8}{63} - \frac{2}{3} = \frac{-44}{63} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{-44 - 21 \cdot 2}{63} = \frac{-86}{63} = -1\frac{23}{63} \quad \text{ד.} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{8}{7} - \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 4 - 9 \cdot 8 - 21 \cdot 2}{63} = \frac{-86}{63} = -1\frac{23}{63} \quad \text{דרך נוספת:}$$

השאלה בעמוד 43

## תשובה 28

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \quad \text{א.}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \quad \text{ב.}$$

$$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \quad \text{ג.}$$

$$9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6 \quad \text{ד. לפי כלל כפל שבר במספר שלם:}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{12} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} \quad \text{דרך נוספת:}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{4 \cdot (-2)}{5 \cdot 3} = \frac{-8}{15} = -\frac{8}{15} \quad \text{ו.}$$

$$1\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{6}{5} \cdot \frac{-1}{7} = \frac{6 \cdot (-1)}{5 \cdot 7} = \frac{-6}{35} = -\frac{6}{35} \quad \text{ז.}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{ח.}$$

הערה: ניתן לקבל ישירות את התוצאה 0 לפי הכלל: מכפלה של כל מספר באפס שווה לאפס. כלל זה תקף גם לשברים.

השאלה בעמוד 45

**תשובה 29**

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1 \quad \text{א. ההופכי של } \frac{3}{4} \text{ הוא } \frac{4}{3}, \text{ ואכן מתקיים:}$$

$$5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{ב. ההופכי של } 5 = \frac{5}{1} \text{ הוא } \frac{1}{5}, \text{ ואכן מתקיים:}$$

$$1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{ג. ההופכי של } 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ הוא } \frac{2}{3}, \text{ ואכן מתקיים:}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \quad \text{ד. ההופכי של } 1 = \frac{1}{1} \text{ הוא } 1, \text{ ואכן מתקיים:}$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \quad \text{ה. ההופכי של } -1 = \frac{-1}{1} \text{ הוא } -1 = \frac{1}{-1}, \text{ ואכן מתקיים:}$$

$$\text{ו. ההופכי של } -3 = \frac{-3}{1} \text{ הוא } -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3}, \text{ ואכן מתקיים:}$$

$$(-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-3}{1} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{ז. ההופכי של } -\frac{4}{7} = \frac{-4}{7} \text{ הוא } -\frac{7}{4} = \frac{7}{-4}, \text{ ואכן מתקיים:}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{-4}{7} \cdot \frac{-7}{4} = \frac{28}{28} = 1$$

השאלה בעמוד 46

**תשובה 30**

$$\frac{3}{2} : \frac{2}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \quad \text{א.}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

$$1\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{ג.}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{-3}{5} : \frac{-2}{7} = \frac{-3}{5} \cdot \frac{7}{-2} = \frac{-21}{-10} = \frac{21}{10} = 2\frac{1}{10} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{5}{3} : 2 = \frac{5}{3} : \frac{2}{1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \quad \text{ה. לפי כלל חלוקת שבר במספר שלם:}$$

$$2 : \frac{5}{3} = \frac{2}{1} : \frac{5}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{36}{6} = 6 \quad \text{ז.}$$

$$3 : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{1} : \frac{-3}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{-3} = \frac{15}{-3} = -\frac{15}{3} = -5 \quad \text{ח.}$$

## תשובה 31

א. לפי סדר הפעולות, נחשב תחילה את ערך הסוגריים:

$$2 - 5 - 6 - (1 - 2) = 2 - 5 - 6 - (-1)$$

כעת נבצע את פעולות החיבור והחיסור לפי הסדר משמאל לימין:

$$= (-3) - 6 - (-1)$$

$$= (-3) + (-6) - (-1) \quad (\text{חיסור שקול לחיבור הנגדי})$$

$$= (-9) - (-1) \quad (\text{הנגדי לסכום שווה לסכום הנגדיים})$$

$$= (-9) + 1 \quad (\text{חיסור שקול לחיבור הנגדי})$$

$$= 1 + (-9) \quad (\text{חוק החילוף בחיבור})$$

$$= 1 - 9 \quad (\text{חיסור שקול לחיבור הנגדי})$$

$$= -(9 - 1) \quad (\text{כלל החלפת המחסר והמחוסר})$$

$$= -8$$

ב. לפי סדר הפעולות, נבצע תחילה את פעולת הכפל:

$$-3 - 5 \cdot 7 + 1 = -3 - 35 + 1$$

כעת נבצע את פעולות החיבור והחיסור לפי הסדר משמאל לימין:

$$= -38 + 1 = -37$$

ג. לפי סדר הפעולות, נחשב תחילה את ערך הסוגריים הפנימיים ביותר:

$$((2 - 3) \cdot (-5) \cdot (-6) + 12) \cdot 2 - 3 = ((-1) \cdot (-5) \cdot (-6) + 12) \cdot 2 - 3$$

כעת נחשב את ערך הסוגריים  $((-1) \cdot (-5) \cdot (-6) + 12)$ , ולצורך כך נכפיל את

$(-1) \cdot (-5) \cdot (-6)$  לפי הסדר משמאל לימין, ולפי חוקי הסימנים:

$$= (5 \cdot (-6) + 12) \cdot 2 - 3$$

$$= (-30 + 12) \cdot 2 - 3$$

$$= (-18) \cdot 2 - 3$$

$$= -36 - 3 = -39$$

$$\left(\frac{2}{7} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{12}{7} = \frac{8 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{56} \cdot \frac{12}{7} = \frac{37}{56} \cdot \frac{12}{7} = \frac{444}{392} = \frac{111}{98} = 1\frac{13}{98} \quad \text{ד.}$$

$$8\frac{2}{3} - 5\frac{3}{4} = \frac{26}{3} - \frac{23}{4} = \frac{4 \cdot 26 - 3 \cdot 23}{12} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{7}} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{21}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{7}} = \frac{\frac{2 \cdot 9 - 1 \cdot 21}{4}}{\frac{7 \cdot 2 - 5 \cdot 3}{35}} = \frac{-3}{4} : \frac{-1}{35} \quad \text{ו.}$$

$$= \frac{-3}{4} \cdot \frac{35}{-1} = \frac{-105}{-4} = \frac{105}{4} = 26\frac{1}{4}$$

השאלה בעמוד 47

תשובה 32

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1; \quad 2^2 = 2 \cdot 2 = 4; \quad 3^2 = 3 \cdot 3 = 9; \quad \text{א.}$$

$$4^2 = 16; \quad 5^2 = 25; \quad 6^2 = 36;$$

$$7^2 = 49; \quad 8^2 = 64; \quad 9^2 = 81;$$

$$10^2 = 100$$

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \quad \text{ב.}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

ג. לפי חוקי הסימנים:

ריבועו של מספר חיובי הוא מספר חיובי כפול בעצמו, ולכן מספר חיובי.

ריבועו של מספר שלילי הוא מספר שלילי כפול בעצמו, ולכן מספר חיובי.

ריבועו של 0 הוא 0.

לכן ריבוע של מספר לא יכול להיות מספר שלילי.

השאלה בעמוד 48

תשובה 33

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \quad \text{א.}$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$2^4 = 16; \quad 2^5 = 32; \quad 2^6 = 64; \quad \text{ב.}$$

$$2^7 = 128; \quad 2^8 = 256; \quad 2^9 = 512;$$

$$2^{10} = 1024$$

השאלה בעמוד 49

תשובה 34

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^{1+3} - 4^{3-1} &= 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^4 - 4^2 \\ &= 2 \cdot 9 + 3 \cdot 625 - 16 \\ &= 18 + 1875 - 16 = 1877 \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 50

תשובה 35

א.  $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

ב.  $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

ג.  $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$

ד.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 1 : \frac{8}{27} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

ה.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = 1 : \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$

ו.  $(-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)^1} = \frac{1}{-1} = -\frac{1}{1} = -1$

השאלה בעמוד 51

תשובה 36

א.  $25 = 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

ב.  $102 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0$

ג.  $3030 = 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^1$

ד.  $190000001 = 1 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^0$

השאלה בעמוד 51

תשובה 37

$$10^{10} - 1 = 10,000,000,000 - 1 = 9,999,999,999$$

הערה: סימני הפסיק נועדו להקל על הקריאה. צורה זו מקובלת בכתיבת מספרים מרובי ספרות.

השאלה בעמוד 51

תשובה 38

א.  $1.1 = 1 + \frac{1}{10} = 1\frac{1}{10} = \frac{11}{10}$

ב.  $10.35 = 10 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} = 10 + \frac{35}{100} = 10\frac{35}{100} = \frac{1035}{100}$

ג.  $13.001 = 13 + \frac{1}{1000} = 13\frac{1}{1000} = \frac{13001}{1000}$

ד.  $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

ה.  $0.01 = \frac{1}{100}$

$$0.000003 = \frac{3}{1000000} \quad \text{ו.}$$

$$-11.5 = -\left(11 + \frac{5}{10}\right) = -11\frac{1}{2} = -\frac{23}{2} \quad \text{ז.}$$

השאלה בעמוד 52

**תשובה 39**

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5 \quad \text{א.}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{3}{10} = 0.3 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0.375 \quad \text{ד.}$$

השאלה בעמוד 52

**תשובה 40**

$$20\% \times 15 = \frac{20}{100} \times 15 = \frac{1}{5} \times 15 = 3 \quad \text{א. } 20\% \text{ מ-} 15 \text{ הם}$$

$$12\% \times 3 = \frac{12}{100} \times 3 = \frac{36}{100} = 0.36 \quad \text{ב. } 12\% \text{ מ-} 3 \text{ הם}$$

$$200\% \times 40 = \frac{200}{100} \times 40 = 80 \quad \text{ג. } 200\% \text{ מ-} 40 \text{ הם}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad \text{ד. החלק היחסי של 15 בתוך 20 הוא}$$

$$\frac{3}{4} \cdot 100 = \frac{300}{4} = 75 \quad \text{כדי לבטא יחס זה באחוזים, נכפול ב-100:}$$

לכן 15 הוא 75% מ-20.

השאלה בעמוד 52

**תשובה 41**

$$20\% \times 8 = \frac{20}{100} \times 8 = \frac{1}{5} \times 8 = \frac{8}{5} = 1.6 \quad \text{א. } 20\% \text{ מתוך 8 שקלים הם:}$$

קילו עגבניות התייקר ב-1.6 שקלים ולכן מחירו החדש הוא 9.6 שקלים, כלומר תשעה שקלים ושישים אגורות.

$$\text{ב. } 30\% \text{ מתוך 70 שקלים הם:}$$

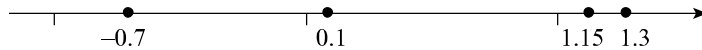
$$30\% \times 70 = \frac{30}{100} \times 70 = \frac{3}{10} \times 70 = \frac{210}{10} = 21$$

גודל ההנחה הוא 21 שקלים ולכן מחירו החדש של ספר הוא  $70 - 21 = 49$  שקלים.



השאלה בעמוד 55

תשובה 42



השאלה בעמוד 55

תשובה 43

א.  $\sqrt{100} = 10$

ב.  $\sqrt{16} = 4$

ג.  $\sqrt{25} = 5$

ד.  $\sqrt{1} = 1$

השאלה בעמוד 56

תשובה 44

א.  $\sqrt[3]{27} = 3$

ב.  $\sqrt[3]{1000} = 10$

ג.  $\sqrt[5]{32} = 2$

ד.  $\sqrt[4]{256} = 4$

השאלה בעמוד 57

תשובה 45

א.  $3 - 6 - 7 = -3 - 7 = -(3 + 7) = -10$

ב.  $\frac{2}{5} - \frac{1}{7} + 1\frac{3}{10} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) + \frac{13}{10} = \frac{7 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{35} + \frac{13}{10} = \frac{9}{35} + \frac{13}{10}$   
 $= \frac{2 \cdot 9 + 7 \cdot 13}{70} = \frac{18 + 91}{70} = \frac{109}{70} = 1\frac{39}{70}$

ג.  $\frac{\sqrt{2^{5-1}} + (0.5)^3}{\frac{2}{3} - \frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{2^4} + (1/2)^3}{\frac{4 \cdot 2 - 3 \cdot 7}{12}} = \left(\sqrt{16} + \frac{1}{8}\right) : \frac{8 - 21}{12} = 4\frac{1}{8} : \frac{-13}{12}$   
 $= \frac{33}{8} : \frac{-13}{12} = \frac{33}{8} \cdot \frac{12}{-13} = \frac{33 \cdot 12}{8 \cdot (-13)} = \frac{33 \cdot 3}{2 \cdot (-13)} = \frac{99}{-26} = -\frac{99}{26}$   
 $= -3\frac{21}{26}$

ד.  $((0.1 - 9) \cdot 8 - 3) \cdot (-7) = \left(\left(\frac{1}{10} - \frac{9}{1}\right) \cdot 8 - 3\right) \cdot (-7)$   
 $= \left(\left(\frac{1 - 10 \cdot 9}{10}\right) \cdot 8 - 3\right) \cdot (-7) = \left(\frac{-89}{10} \cdot 8 - 3\right) \cdot (-7)$   
 $= \left(\frac{-89 \cdot 8}{10} - 3\right) \cdot (-7) = \left(\frac{-89 \cdot 4}{5} - \frac{3}{1}\right) \cdot (-7)$   
 $= \frac{-356 - 5 \cdot 3}{5} \cdot (-7) = \frac{-371 \cdot (-7)}{5} = \frac{2597}{5}$   
 $= 519\frac{2}{5}$

הערה: אפשר לפתור גם בעזרת שברים עשרוניים, כך:

$$\begin{aligned}((0.1 - 9) \cdot 8 - 3) \cdot (-7) &= (-8.9 \cdot 8 - 3) \cdot (-7) = (-71.2 - 3) \cdot (-7) \\ &= (-74.2) \cdot (-7) = 519.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 - (1 - 2))^2 - 1 + (-3) \cdot 2 &= (1 - (-1))^2 - 1 + (-6) = (1 + 1)^2 - 1 - 6 \\ &= 4 - 1 - 6 = 3 - 6 = -(6 - 3) = -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} : \frac{2}{5} : \frac{1}{4} - 1.5^2 &= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}\right) : \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{6} \cdot \frac{4}{1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{40}{6} - \frac{9}{4} \\ &= \frac{20}{3} - \frac{9}{4} = \frac{4 \cdot 20 - 3 \cdot 9}{12} = \frac{80 - 27}{12} = \frac{53}{12} = 4\frac{5}{12}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{5}{8}$$

$$\begin{aligned}(1.1)^2 + (0.3)^{-2} &= \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{3}{10}\right)^2} \\ &= \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10} + \frac{1}{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10}} = \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 10} + \frac{1}{\left(\frac{9}{100}\right)} \\ &= \frac{121}{100} + \frac{100}{9} = \frac{9 \cdot 121 + 100 \cdot 100}{900} = \frac{11089}{900} = 12\frac{289}{900}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(-3 - (-5)) - (-1)^5 &= -(-3 + 5) - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \\ &= -2 - (-1) = -2 + 1 = -1\end{aligned}$$

$$\frac{0.001}{0.0003} = \frac{1}{1000} : \frac{3}{10000} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{10000}{3} = \frac{10000}{3000} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

השאלה בעמוד 57

## תשובה 46

א. 7.5% מתוך 2/5 הם:

$$7.5\% \times \frac{2}{5} = \frac{7.5}{100} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15/2}{100} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15}{200} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{40} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{200} = \frac{3}{100} = 0.03$$

ב. 205% מתוך 120 הם:

$$205\% \times 120 = \frac{205}{100} \cdot 120 = \frac{41}{20} \cdot 120 = \frac{41 \cdot 120}{20} = 41 \cdot \frac{120}{20} = 41 \cdot 6 = 246$$

ג. החלק היחסי של 12 מתוך 13 הוא 12/13, ובאחוזים:

$$\frac{12}{13} \cdot 100 = \frac{1200}{13} = 92\frac{4}{13} \approx 92.3$$

לכן 12 הם כ-92.3% מתוך 13.

ד. תוספת המחיר לליטר דלק היא 5% מתוך 6.13 שקלים, כלומר:

$$5\% \times 6.13 = \frac{5}{100} \times 6.13 = \frac{30.65}{100} = 0.3065$$

התוספת היא אפוא 0.3065 שקלים, כלומר 31 אגורות (עיגלנו למספר האגורות השלם הקרוב ביותר). לכן המחיר החדש הוא 6.44 שקלים לליטר.

## פתרונות לשאלות בשיעור 2

השאלה בעמוד 61

## תשובה 1

א. נציב בתבנית  $x - 3y$ ,

$$x - 3y = 1 - 3 \cdot 1 = -2 \quad : x = 1, y = 1 \quad (i)$$

$$x - 3y = 0 - 3 \cdot (-1) = 3 \quad : x = 0, y = -1 \quad (ii)$$

$$x - 3y = 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \quad : x = 3, y = 1/2 \quad (iii)$$

ב. נציב בתבנית  $x^5 - 8x^2 - 3$ ,

$$x^5 - 8x^2 - 3 = 2^5 - 8 \cdot 2^2 - 3 = -3 \quad : x = 2 \quad (i)$$

$$x^5 - 8x^2 - 3 = (-2)^5 - 8 \cdot (-2)^2 - 3 = (-32) - 8 \cdot 4 - 3 = -67 \quad : x = -2 \quad (ii)$$

$$x^5 - 8x^2 - 3 = 0^5 - 8 \cdot 0^2 - 3 = -3 \quad : x = 0 \quad (iii)$$

ג. נציב בתבנית  $\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot z$ ,

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot z = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2/3}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad : x = 1/2, y = 2/3, z = 1/2 \quad (i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot z = \left(1 + \frac{1}{0}\right) \cdot 1 \quad : x = 1, y = 0, z = 1 \quad (ii)$$

הביטוי אינו מוגדר (יש חלוקה באפס).

ד. נציב בתבנית  $x\sqrt{y-x}$ ,

$$x\sqrt{y-x} = 1 \cdot \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3 \quad : x = 1, y = 10 \quad (i)$$

$$x\sqrt{y-x} = 0 \cdot \sqrt{-1-0} = 0 \quad : x = 0, y = -1 \quad (ii)$$

הביטוי אינו מוגדר (מופיע בו שורש של מספר שלילי).

השאלה בעמוד 62

## תשובה 2

א. חישוב ישיר:

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5=15 \\ \underline{\quad 3 \quad} \\ \underline{\quad 6 \quad} \\ 10 \end{array}$$

$$1+2+3+4+5 = \frac{5 \cdot (5+1)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{30}{2} = 15 \quad \text{לפי הנוסחה:}$$

$$1+2+3+\dots+50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = \frac{2550}{2} = 1275 \quad \text{ב.}$$

ג. נחשב תחילה את הסכומים הבאים:

$$1+2+3+\dots+200 = \frac{200 \cdot 201}{2} = \frac{200}{2} \cdot 201 = 100 \cdot 201 = 20100$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{100}{2} \cdot 101 = 50 \cdot 101 = 5050$$

כדי לחשב את הסכום  $101 + 102 + 103 + \dots + 200$  נפחית מהסכום

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 \text{ את הסכום } 1 + 2 + 3 + \dots + 200$$

$$\begin{aligned} 101 + 102 + 103 + \dots + 200 &= (1 + 2 + \dots + 200) - (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= 20100 - 5050 = 15050 \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 62

### תשובה 3

$$F = C \cdot \frac{9}{5} + 32 \quad \text{ניעזר בנוסחת ההמרה:}$$

$$F = 7 \cdot \frac{9}{5} + 32 = \frac{63}{5} + 32 = 12\frac{3}{5} + 32 = 44\frac{3}{5} = 44.6 \quad \text{א. אם } C = 7 \text{ אז}$$

$$\text{לכן } 7^\circ C = 44.6^\circ F$$

$$F = 0 \cdot \frac{9}{5} + 32 = 0 + 32 = 32 \quad \text{ב. אם } C = 0 \text{ אז}$$

$$\text{לכן } 0^\circ C = 32^\circ F$$

$$F = 100 \cdot \frac{9}{5} + 32 = 180 + 32 = 212 \quad \text{ג. אם } C = 100 \text{ אז}$$

$$\text{לכן } 100^\circ C = 212^\circ F$$

השאלה בעמוד 63

### תשובה 4

$$(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2 \quad \text{נבחן את נכונות הזהות}$$

$$(x + 2)(x - 1) = (1 + 2) \cdot (1 - 1) = 3 \cdot 0 = 0 \quad \text{א. עבור } x = 1$$

$$x^2 + x - 2 = 1^2 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = \left(\frac{1}{2} + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{5}{4} \quad \text{ב. עבור } x = 1/2$$

$$x^2 + x - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{4} - \frac{8}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$(x + 2)(x - 1) = (-3 + 2)(-3 - 1) = (-1) \cdot (-4) = 4 \quad \text{ג. עבור } x = -3$$

$$x^2 + x - 2 = (-3)^2 + (-3) - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$$

בכל שלושת המקרים וידאנו שאכן הזהות מתקיימת.

השאלה בעמוד 64

### תשובה 5

$$\text{א. בזהות } ab = ba$$

$$x(x^2 - 1) = (x^2 - 1)x \quad \text{(i) נציב } a = x, b = x^2 - 1 \text{ ונקבל:}$$

$$(1 - a)(2 - b) = (2 - b)(1 - a) \quad \text{(ii) נציב } a \rightarrow 1 - a, b \rightarrow 2 - b \text{ ונקבל:}$$

$$ba = ab \quad \text{(iii) נציב } a \rightarrow b, b \rightarrow a \text{ ונקבל:}$$

$$a \cdot 5 = 5a \quad \text{(iv) נציב } b = 5 \text{ ונקבל:}$$

ב. בזהות  $a - a = 0$ ,

$$a^2 - a^2 = 0$$

(i) נציב  $a \rightarrow a^2$  ונקבל:

$$(b+1) - (b+1) = 0$$

(ii) נציב  $a = b+1$  ונקבל:

$$ab - ab = 0$$

(iii) נציב  $a \rightarrow ab$  ונקבל:

השאלה בעמוד 67

**תשובה 6**

$$3(x+5) = 3x + 3 \cdot 5 = 3x + 15$$

א. לפי חוק הפילוג:

$$(y+2) \cdot 3 = y \cdot 3 + 2 \cdot 3$$

ב. לפי חוק הפילוג מימין:

$$= 3y + 6$$

לפי חוק החילוף בכפל:

$$5(2x+1) = 5 \cdot (2x) + 5 \cdot 1$$

ג. לפי חוק הפילוג:

$$= (5 \cdot 2) \cdot x + 5 = 10x + 5$$

לפי חוק הקיבוץ בכפל:

$$x(x+y) = x \cdot x + x \cdot y = x^2 + xy$$

ד. לפי חוק הפילוג:

$$a(2a+3) = a \cdot (2a) + a \cdot 3$$

ה. לפי חוק הפילוג:

$$= 2aa + 3a = 2a^2 + 3a$$

לפי חוקי החילוף והקיבוץ בכפל:

השאלה בעמוד 68

**תשובה 7**לפי הזהות  $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ :

$$(a+1)(a+4) = a \cdot a + a \cdot 4 + 1 \cdot a + 1 \cdot 4$$

א.

$$= a^2 + 4 \cdot a + 1 \cdot a + 4$$

(לפי חוק החילוף בכפל)

$$= a^2 + (4+1) \cdot a + 4$$

(לפי חוק הפילוג)

$$= a^2 + 5a + 4$$

$$(x+y)(2x+3y) = x \cdot 2x + x \cdot 3y + y \cdot 2x + y \cdot 3y$$

ב.

$$= 2x^2 + 3xy + 2xy + 3y^2$$

$$= 2x^2 + (3+2)xy + 3y^2$$

$$= 2x^2 + 5xy + 3y^2$$

$$(2x+5)(3x+6) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 6 + 5 \cdot 3x + 5 \cdot 6$$

ג.

$$= 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 6 \cdot x + 5 \cdot 3 \cdot x + 30$$

$$= 6x^2 + 12x + 15x + 30$$

$$= 6x^2 + (12+15)x + 30$$

$$= 6x^2 + 27x + 30$$

השאלה בעמוד 70

**תשובה 8**א. כדי לפתוח סוגריים בביטוי  $(a+b+2)(a+2)$ , נייצר את טבלת המכפלות:

|   |                |    |
|---|----------------|----|
| · | a              | 2  |
| a | a <sup>2</sup> | 2a |
| b | ba             | 2b |
| 2 | 2a             | 4  |

$$(a + b + 2)(a + 2) = a^2 + 2a + ab + 2b + 2a + 4$$

$$= a^2 + 4a + 2b + ab + 4$$

נקבל:

נבדוק על ידי הצבה  $a = 2, b = 3$ :

$$(a + b + 2)(a + 2) = (2 + 3 + 2) \cdot (2 + 2) = 7 \cdot 4 = 28$$

$$a^2 + 4a + 2b + ab + 4 = 2^2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 4$$

$$= 4 + 8 + 6 + 6 + 4 = 28$$

אכן קיבלנו את אותה התוצאה בשני הביטויים.

ב. באופן דומה:

|      |         |        |       |
|------|---------|--------|-------|
| .    | $ac$    | $b$    | $c$   |
| $ab$ | $a^2bc$ | $ab^2$ | $abc$ |
| $c$  | $ac^2$  | $bc$   | $c^2$ |

$$(ab + c)(ac + b + c) = a^2bc + ab^2 + abc + ac^2 + bc + c^2$$

נציב  $a = 1, b = 2, c = 3$ :

$$(ab + c)(ac + b + c) = (1 \cdot 2 + 3) \cdot (1 \cdot 3 + 2 + 3) = 5 \cdot 8 = 40$$

$$a^2bc + ab^2 + abc + ac^2 + bc + c^2$$

$$= 1^2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3^2$$

$$= 6 + 4 + 6 + 9 + 6 + 9 = 40$$

$$(t^2 + 2)(t + 3) = t^2 \cdot t + t^2 \cdot 3 + 2 \cdot t + 2 \cdot 3 = t^3 + 3t^2 + 2t + 6$$

$$(t^2 + 2)(t + 3) = (3^2 + 2) \cdot (3 + 3) = 11 \cdot 6 = 66$$

נציב  $t = 3$ :

$$t^3 + 3t^2 + 2t + 6 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 6 = 27 + 27 + 6 + 6 = 66$$

ד. נחשב באופן ישיר:

$$(2x^2 + 3x + 2)(5x^2 + x + 3) = 10x^4 + 2x^3 + 6x^2$$

$$+ 15x^3 + 3x^2 + 9x$$

$$+ 10x^2 + 2x + 6$$

$$= 10x^4 + 17x^3 + 19x^2 + 11x + 6$$

נציב  $x = 1$ :

$$(2x^2 + 3x + 2)(5x^2 + x + 3) = (2 + 3 + 2) \cdot (5 + 1 + 3) = 7 \cdot 9 = 63$$

$$10x^4 + 17x^3 + 19x^2 + 11x + 6 = 10 + 17 + 19 + 11 + 6 = 63$$

השאלה בעמוד 70

## תשובה 9

נוכיח את הזהות  $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ :

$$a(b + c + d) = a((b + c) + d)$$

לפי חוק הקיבוץ בחיבור,

$$= a(b + c) + ad$$

לפי חוק הפילוג

$$= ab + ac + ad$$

ושוב לפי חוק הפילוג

כנדרש.

נוכיח את הזהות  $(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$  בשיטה דומה:  
שימוש בחוק הקיבוץ בחיבור ולאחר מכן שימוש בזהויות ידועות לפתיחת סוגריים.

$$\begin{aligned}(a + b + c)(d + e) &= ((a + b) + c)(d + e) \\ &= (a + b)(d + e) + c(d + e) \\ &= ad + ae + bd + be + cd + ce\end{aligned}$$

נוכיח באותה שיטה את הזהות עבור הביטוי  $(a + b + c)(d + e + f)$ :

$$\begin{aligned}(a + b + c)(d + e + f) &= (a + (b + c))(d + e + f) \\ &= a(d + e + f) + (b + c)(d + e + f) \\ &= a(d + e + f) + b(d + e + f) + c(d + e + f) \\ &= ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf\end{aligned}$$

שימו לב שבמעבר האחרון נעזרנו בזהות הראשונה שהוכחנו בשאלה זו.

השאלה בעמוד 70

### תשובה 10

$$\begin{aligned}\text{א. } (x + 1)(x + 2)(x + 3) &= ((x + 1)(x + 2))(x + 3) \\ &= (x^2 + 1 \cdot x + 2 \cdot x + 2)(x + 3) \\ &= (x^2 + 3x + 2)(x + 3) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ב. } (a + b)(c + d)(e + f) &= ((a + b)(c + d))(e + f) \\ &= (ac + ad + bc + bd)(e + f) \\ &= ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf\end{aligned}$$

הערה: ניתן לתאר את הביטוי שהתקבל כך: סכום כל המכפלות של שלושה איברים

בבחירה של איבר אחד ויחיד מתוך כל אחד מהסוגריים  $(a + b)$ ,  $(c + d)$ ,  $(e + f)$ .

השאלה בעמוד 73

### תשובה 11

$$\begin{aligned}\text{א. } (a + b)(c - d) &= (a + b)(c + (-d)) = ac + a(-d) + bc + b(-d) \\ &= ac + (-ad) + bc + (-bd) = ac - ad + bc - bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ב. } (a - b)(c - d) &= (a + (-b))(c + (-d)) \\ &= ac + a(-d) + (-b)c + (-b)(-d) \\ &= ac + (-ad) + (-bc) + bd = ac - ad - bc + bd\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ג. } (a + b - c)(-d + e) &= (a + b + (-c))((-d) + e) \\ &= a(-d) + ae + b(-d) + be + (-c)(-d) + (-c)e \\ &= -ad + ae + (-bd) + be + cd + (-ce) \\ &= -ad + ae - bd + be + cd - ce\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -(a + b - c - d) &= (-1)(a + b + (-c) + (-d)) \\ &= (-1)a + (-1)b + (-1)(-c) + (-1)(-d) \\ &= -a + (-b) + c + d \\ &= -a - b + c + d \end{aligned} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a + (-(b + c)) = a + ((-b) + (-c)) \\ &= a + (-b) + (-c) = a - b - c \end{aligned} \quad \text{ה.}$$

$$\begin{aligned} a - (b - c) + d &= a + (-(b - c)) + d = a + (c - b) + d \\ &= a + c - b + d \end{aligned} \quad \text{ו.}$$

$$x(x + y) = x^2 + xy \quad \text{ז.}$$

$$\begin{aligned} (x + 3)(2x - 1) &= 2x^2 - x + 6x - 3 = 2x^2 + (6 - 1)x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned} \quad \text{ח.}$$

$$\begin{aligned} (x - 2)(x^2 + 2x - 3) &= x^3 + 2x^2 - 3x - 2x^2 - 4x + 6 \\ &= x^3 - 7x + 6 \end{aligned} \quad \text{ט.}$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1 \quad \text{י.}$$

$$\begin{aligned} 12x - (x + 2)(x + 3) &= 12x - (x^2 + 3x + 2x + 6) \\ &= 12x - (x^2 + 5x + 6) = -x^2 + 7x - 6 \end{aligned} \quad \text{יא.}$$

$$\begin{aligned} (2x + y)(3x - y)(-x + 2y) &= ((2x + y)(3x - y))(-x + 2y) \\ &= (6x^2 - 2xy + 3xy - y^2)(-x + 2y) \\ &= (6x^2 + xy - y^2)(-x + 2y) \\ &= -6x^3 + 12x^2y - x^2y + 2xy^2 + xy^2 - 2y^3 \\ &= -6x^3 + 11x^2y + 3xy^2 - 2y^3 \end{aligned} \quad \text{יב.}$$

השאלה בעמוד 74

## תשובה 12

בכל הסעיפים נסתמך על חוק הפילוג, ובמקרה הצורך גם על חוק החילוף בכפל.

$$x^2 - 2x = x \cdot x - x \cdot 2 = x(x - 2) \quad \text{א.}$$

$$5x - 7x = (5 - 7)x = (-2)x = -2x \quad \text{ב.}$$

$$ab - b^2 = ab - b \cdot b = (a - b)b \quad \text{ג.}$$

$$a^2b - ab^2 = aab - abb = aba - abb = ab(a - b) \quad \text{ד.}$$

$$x^2 + xy + 2x = xx + xy + x \cdot 2 = x(x + y + 2) \quad \text{ה.}$$

$$\begin{aligned} abc + b^2c + c^2b &= abc + bbc + ccb = bca + bcb + bcc \\ &= bc(a + b + c) \end{aligned} \quad \text{ו.}$$

$$2a^2 - 2a - ab = a \cdot 2a - a \cdot 2 - ab = a(2a - 2 - b) \\ = a(2a - b - 2) \quad \text{ז.}$$

$$(a + 3)b + a + 3 = (a + 3)b + (a + 3) \cdot 1 = (a + 3)(b + 1) \quad \text{ח.}$$

השאלה בעמוד 76

## תשובה 13

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \cdot 1}{bc} = \frac{a}{bc} \quad \text{א.}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b \cdot 1} = \frac{ac}{b} \quad \text{ב.}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1 \cdot b}{1 \cdot a} = \frac{b}{a} \quad \text{ג.}$$

$$1 : (1 : a) = 1 : \frac{1}{a} = \frac{a}{1} = a \quad \text{ד. לפי הסעיף הקודם:}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot (-1)}{b \cdot (-1)} = \frac{-a}{-b} \quad \text{ה. לפי חוק ההרחבה:}$$

ו. לפי הסעיף הקודם:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{-(-b)} = \frac{-a}{b} = \frac{(-1) \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{-1}{1} \cdot \frac{a}{b} = (-1) \cdot \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

השאלה בעמוד 79

## תשובה 14

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} \quad \text{בזהות}$$

א. נציב  $x = 1$ :

$$\frac{1}{(1+1)(1+2)} + \frac{1+1}{(1+2)(1+3)} = \frac{1}{6} + \frac{2}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1}{1^3 + 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 6} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{0}{(0+1)(0+2)} + \frac{0+1}{(0+2)(0+3)} = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{נציב } x = 0:$$

$$\frac{2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 1}{0^3 + 6 \cdot 0^2 + 11 \cdot 0 + 6} = \frac{1}{6}$$

ב. אם נציב  $x = -1$ , נקבל חלוקה באפס בשני האגפים: באגף שמאל המכנה של המחובר הראשון יהיה  $(-1+1)(-1+2) = 0$ , ובאגף ימין המכנה יהיה  $0 = 0 = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) + 6$ . לכן  $x = -1$  אינו הצבה חוקית עבור זהות זו. כאמור בתחילת השיעור, זהות נדרשת להתקיים רק עבור ההצבות החוקיות של המשתנים ולכן אין בכך סתירה לזהות.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1) + 3x}{x(x+1)} = \frac{2x+2+3x}{x(x+1)} = \frac{5x+2}{x^2+x} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} - \frac{y}{y^2+1} &= \frac{x(y^2+1) - y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)} \\ &= \frac{xy^2 + x - yx^2 - y}{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1} \quad \text{ב.} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4x}{5x+1} = \frac{2(5x+1) - 3 \cdot 4x}{3(5x+1)} = \frac{10x+2-12x}{15x+3} = \frac{-2x+2}{15x+3} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} &= \frac{x(x+2) - (x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+2x - (x^2+2x+1)}{x^2+2x+x+2} \\ &= \frac{-1}{x^2+3x+2} \quad \text{ד.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{3x-1} : \frac{4y}{x+y} &= \frac{2x}{3x-1} \cdot \frac{x+y}{4y} = \frac{2x(x+y)}{(3x-1)4y} = \frac{x(x+y)}{(3x-1)2y} \\ &= \frac{x^2+xy}{6xy-2y} \quad \text{ה.} \end{aligned}$$

$$\text{ו. לפי הזהות } \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{2x}{x+1} \right) &= \frac{2x}{(x+1)(x^2+2x)} = \frac{2x}{(x+1)x(x+2)} = \frac{2}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2}{x^2+3x+2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{(x+1)+2x}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x^2+x} \quad \text{ז. למען הפשטות, נחשב תחילה:}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{x+1} = \frac{3(x+1)+4x}{x(x+1)} = \frac{3x+3+4x}{x^2+x} = \frac{7x+3}{x^2+x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}}{\frac{3}{x} + \frac{4}{x+1}} &= \frac{\frac{3x+1}{x^2+x}}{\frac{7x+3}{x^2+x}} = \frac{3x+1}{x^2+x} \cdot \frac{x^2+x}{7x+3} \\ &= \frac{(3x+1)(x^2+x)}{(7x+3)(x^2+x)} = \frac{3x+1}{7x+3} \quad \text{כעת נחלק:} \end{aligned}$$

הערה: ניתן לפתור גם על ידי הרחבת השבר כולו בביטוי  $x(x+1)$ . ניתן להניח שביטוי זה שונה מאפס כי הוא מכפלת המכנים שבביטוי שאנו מפשטים. מתקבל:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}}{\frac{3}{x} + \frac{4}{x+1}} &= \frac{\left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} \right) x(x+1)}{\left( \frac{3}{x} + \frac{4}{x+1} \right) x(x+1)} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x(x+1) + \frac{2}{x+1} \cdot x(x+1)}{\frac{3}{x} \cdot x(x+1) + \frac{4}{x+1} \cdot x(x+1)} \\ &= \frac{x+1+2x}{3(x+1)+4x} = \frac{3x+1}{7x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-1}{3-x} - \frac{-5}{5-x} &= \frac{(-1)(5-x) - (-5)(3-x)}{(3-x)(5-x)} = \frac{-5+x - (-15+5x)}{15-3x-5x+x^2} \\ &= \frac{-5+x+15-5x}{15-8x+x^2} = \frac{10-4x}{x^2-8x+15}\end{aligned}\quad \text{ח.}$$

$$\begin{aligned}x \cdot \frac{y}{y+1} - y \cdot \frac{2x}{x-1} &= \frac{xy}{y+1} - \frac{2xy}{x-1} = \frac{xy(x-1) - 2xy(y+1)}{(y+1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2y - xy - 2xy^2 - 2xy}{xy - y + x - 1} = \frac{x^2y - 2xy^2 - 3xy}{xy + x - y - 1}\end{aligned}\quad \text{ט.}$$

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(1 - \frac{3}{x}\right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{1} - \frac{3}{x}\right) \\ &= \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x-3}{x} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^3} \\ &= \frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{x^3} = \frac{x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6}{x^3} \\ &= \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3}\end{aligned}\quad \text{י.}$$

השאלה בעמוד 80

**תשובה 16**א. נציב  $x = \frac{1}{y}$  בביטוי  $x + x^2$  ונפשט:

$$\frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{y+1}{y^2}$$

$$y + \frac{1}{y} = \frac{y}{1} + \frac{1}{y} = \frac{y^2+1}{y} \quad \text{ב. נפשט תחילה:}$$

כעת נציב  $x = y + \frac{1}{y}$  בביטוי  $x + x^2$  : נקבל

$$\begin{aligned}y + \frac{1}{y} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 &= \frac{y^2+1}{y} + \left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2 = \frac{y^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{y} \cdot \frac{y^2+1}{y} \\ &= \frac{y^2+1}{y} + \frac{(y^2+1)(y^2+1)}{y^2} \\ &= \frac{y^2+1}{y} + \frac{y^2 \cdot y^2 + y^2 + y^2 + 1}{y^2} \\ &= \frac{y(y^2+1) + y^4 + 2y^2 + 1}{y^2} = \frac{y^3 + y + y^4 + 2y^2 + 1}{y^2} \\ &= \frac{y^4 + y^3 + 2y^2 + y + 1}{y^2}\end{aligned}$$

הערה: במהלך הפישוט ביצענו את המעברים הבאים:

$$y^2 \cdot y^2 = y \cdot y \cdot y \cdot y = y^4, \quad y \cdot y^2 = y \cdot y \cdot y = y^3$$

בהמשך שיעור זה נלמד את חוקי החזקות שמהם ינבעו מעברים אלה ביתר קלות.

ג. נציב  $\frac{2+x}{2-x} \rightarrow x$  בביטוי  $\frac{x}{x+1}$ . נקבל:

$$\frac{\frac{2+x}{2-x}}{\frac{2+x}{2-x} + 1} = \frac{\frac{2+x}{2-x} \cdot (2-x)}{\left(\frac{2+x}{2-x} + 1\right)(2-x)} = \frac{2+x}{2+x+(2-x)} = \frac{2+x}{4}$$

ד. נציב  $\frac{x}{x+1} \rightarrow x$  בביטוי  $\frac{x}{x+1}$ . נקבל:

$$\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot (x+1)}{\left(\frac{x}{x+1} + 1\right)(x+1)} = \frac{x}{x+(x+1)} = \frac{x}{2x+1}$$

ה. נציב  $\frac{1}{x} \rightarrow y$  בביטוי  $\frac{x+y}{2x+3y}$ . נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{(x-y) + \left(y - \frac{1}{x}\right)}{2(x-y) + 3\left(y - \frac{1}{x}\right)} &= \frac{(x-y) + \left(y - \frac{1}{x}\right)}{2(x-y) + 3\left(y - \frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{x}{x} \\ &= \frac{(x-y)x + (yx-1)}{2(x-y)x + 3(yx-1)} \\ &= \frac{x^2 - xy + xy - 1}{2x^2 - 2xy + 3xy - 3} = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + xy - 3} \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 81

## תשובה 17

א.  $51^2 = (50+1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$

ב.  $10.5^2 = \left(10 + \frac{1}{2}\right)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 + 10 + \frac{1}{4} = 110.25$

ג.  $18 \times 22 = (20-2) \cdot (20+2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$

ד.  $(a-b)(a+b) = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  (השתמשנו בחוק החילוף בכפל):

ה.  $96 \times 104 = (100-4) \cdot (100+4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984$

ה.  $9.8^2 = (10-0.2)^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0.2 + 0.2^2 = 100 - 4 + 0.04 = 96.04$

הערה: את הביטוי  $0.2^2$  ניתן להעריך כך:

$$0.2^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100} = 0.04$$

ו.  $97^2 = (100-3)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$

השאלה בעמוד 82

תשובה 18

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9 \quad \text{א.}$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9 \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = (2x) \cdot (2x) - 2x + \frac{1}{4} \\ &= 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{aligned} (2x+y)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = (2x) \cdot (2x) + 4xy + y^2 \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2 \end{aligned} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{aligned} (2x-3y)^2 &= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 \\ &= (2x) \cdot (2x) - 12xy + (3y) \cdot (3y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2 \end{aligned} \quad \text{ה.}$$

$$(x+y+3)(x+y-3) = (x+y)^2 - 3^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 9 \quad \text{ו.}$$

השאלה בעמוד 82

תשובה 19

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &= ((a+b)+(c+d))^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac+ad+bc+bd) + c^2 + 2cd + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \end{aligned} \quad \text{ב.}$$

השאלה בעמוד 82

תשובה 20

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

ב. נציב בזהות עבור  $(a+b)^3$  (שהוכחנו בסעיף א),  $b \rightarrow -b$ :

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

נציב בזהות עבור  $a^3 - b^3$ ,  $b \rightarrow -b$ :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= a^3 - (-b)^3 = (a - (-b))(a^2 + a(-b) + (-b)^2) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 82

תשובה 21

א. לפי הזהות  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  :

$$(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

ב. לפי הזהות  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  (שהוכחנו בשאלה 19):

$$\begin{aligned}(2x - 3)^3 &= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 - 3^3 \\&= (2x) \cdot (2x) \cdot (2x) - 3 \cdot 3 \cdot (2x) \cdot (2x) + 3 \cdot 3^2 \cdot (2x) - 3^3 \\&= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (x \cdot x \cdot x) - (3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (x \cdot x) + (3 \cdot 9 \cdot 2) \cdot x - 27 \\&= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27\end{aligned}$$

הערה: חלק מהמעברים בפתרון זה יבוצעו בקלות רבה יותר לאחר שנלמד את חוקי החזקות.

השאלה בעמוד 83

תשובה 22

ניעזר בנוסחאות הכפל המקוצר.

א.  $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$  נעזרנו בזהות:

ב.  $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$  נעזרנו בזהות:

ג.  $a^2b^2 - 2ab + 1 = aabb - 2ab + 1 = abab - 2ab + 1^2$   $= (ab)^2 - 2 \cdot (ab) \cdot 1 + 1^2 = (ab - 1)^2$  נעזרנו בזהות:

ד.  $x^4 - x^2 = xxxx - xx = xx(xx - 1) = x^2(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$  בשוויון האחרון נעזרנו בתוצאת סעיף א.

ה.  $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x \cdot 1 + 1^2) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$  נעזרנו בזהות:

ו. נשים לב לשוויון:  $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$  לכן,  $x^3 + 1 = x^3 - (-1) = x^3 - (-1)^3$   $= (x - (-1))(x^2 + x \cdot (-1) + (-1)^2) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$  גם כאן נעזרנו בזהות:

לחילופין, ניתן היה להיעזר בזהות  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  שהוכחה בשאלה 19.

ז.  $(2a + 1)^2 - (3a - 1)^2 = ((2a + 1) + (3a - 1))((2a + 1) - (3a - 1))$   $= (2a + 1 + 3a + (-1))(2a + 1 + (-1)(3a - 1))$   $= (2a + 3a)(2a + 1 + (-3a) + 1)$   $= 5a(2a - 3a + 2) = 5a(-a + 2)$   $= 5a(2 - a) = -5a(a - 2)$  נעזרנו בזהות:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

השאלה בעמוד 87

$$2x^2 + 4x + 2 = 2x^2 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)^2 \quad \text{ח.}$$

בשוויון האחרון נעזרנו בתוצאת סעיף ב.

**תשובה 23**

$$(3x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3 \quad \text{א. לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל:}$$

$$(y^3)^2 = y^{3 \cdot 2} = y^6 \quad \text{ב. לפי חוק החזקה של חזקה:}$$

$$(2x^2 y^3)^2 = 2^2 (x^2)^2 (y^3)^2 = 4x^{2 \cdot 2} y^{3 \cdot 2} = 4x^4 y^6 \quad \text{ג. לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל:}$$

לפי חוק החזקה של חזקה:

$$(x^2 + y)(x^3 - y) = x^2 x^3 - x^2 y + x^3 y - y^2 = x^5 - x^2 y + x^3 y - y^2 \quad \text{ד. נפתח סוגריים במכפלה:}$$

לפי חוק חיבור המעריכים:

$$(x^3 + 2x^5)^2 = (x^3)^2 + 2x^3(2x^5) + (2x^5)^2 = x^{3 \cdot 2} + 4x^{3+5} + 2^2(x^5)^2 = x^6 + 4x^8 + 4x^{5 \cdot 2} = 4x^{10} + 4x^8 + x^6 \quad \text{ה. לפי נוסחאות הכפל המקוצר:}$$

נפשט לפי חוקי החזקות:

$$(x^2 + 2)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2 \cdot 2 + 3x^2 \cdot 2^2 + 2^3 = x^{2 \cdot 3} + 6x^{2 \cdot 2} + 12x^2 + 8 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 \quad \text{ו. לפי הזהות } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

נפשט לפי חוקי החזקות:

$$(2 + x^{-1})(x + 3x^{-2}) = 2x + 2 \cdot 3x^{-2} + x^{-1}x^1 + x^{-1} \cdot 3x^{-2} = 2x + 6x^{-2} + x^0 + 3x^{-3} = 2x + 1 + 6x^{-2} + 3x^{-3} = 2x + 1 + \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^3} \quad \text{ז. נפתח את הסוגריים ונפשט לפי חוקי החזקות (שימו לב ש- } x^{-1} = \frac{1}{x} \text{):}$$

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + 2x \cdot x^{-1} + (x^{-1})^2 = x^2 + 2x^0 + x^{(-1) \cdot 2} = x^2 + 2 + x^{-2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{ח. לפי נוסחאות הכפל המקוצר וחוקי החזקות:}$$

השאלה בעמוד 87

**תשובה 24**

א. לפי חוק חיבור המעריכים:

$$10^{10} \cdot 100 = 10^{10} \cdot 10^2 = 10^{10+2} = 10^{12} = 1000000000000$$

במספר זה יש 12 אפסים, ובסך הכול 13 ספרות.



ב. לפי חוק החזקה של חזקה:  $100^{100} = (10^2)^{100} = 10^{2 \cdot 100} = 10^{200}$   
במספר זה יש 200 אפסים, ובסך הכול 201 ספרות.

ג. לפי חוק החזקה של חזקה:  $(10^{10})^{10} = 10^{10 \cdot 10} = 10^{100}$   
במספר זה יש 100 אפסים, ובסך הכול 101 ספרות.

ד. במספר  $10^{(10^{10})}$  יש  $10^{10} = 10000000000$  אפסים, ובסך הכול  $10^{10} + 1 = 100000000001$  ספרות.

ה.  $10^{-3} = 0.001$   
במספר זה יש 3 ספרות אחרי הנקודה, ובסך הכול 4 ספרות.

ו.  $100^{-10} = (10^2)^{-10} = 10^{-20}$   
במספר זה יש 20 ספרות אחרי הנקודה, ובסך הכול 21 ספרות.

השאלה בעמוד 87

## תשובה 25

א. לפי חוק חיבור המעריכים,  $x^8 = x^5 \cdot x^3$ , לכן,  
 $x^3 - x^8 = x^3 \cdot 1 - x^3 \cdot x^5 = x^3(1 - x^5) = -x^3(x^5 - 1)$   
הערה: מקובל לכתוב בתשובה הסופית את המחברים לפי סדר חזקות יורד. לכן בחרנו להמיר את הביטוי  $1 - x^5$  בביטוי  $-(x^5 - 1)$ .

ב. לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל, וחוק חיבור המעריכים:  
 $(ab)^5 - 8a^7 = a^5b^5 - 8a^7 = a^5b^5 - 8a^5a^2 = a^5(b^5 - 8a^2)$

ג. לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל, וחוק חיבור המעריכים:  
 $(xy)^5 + (2xy)^3 + 3y^2 = x^5y^5 + 2^3x^3y^3 + 3y^2$   
 $= x^5y^5 + 8x^3y^3 + 3y^2$   
 $= x^5y^3y^2 + 8x^3y \cdot y^2 + 3y^2$   
 $= (x^5y^3 + 8x^3y + 3)y^2$

השאלה בעמוד 88

## תשובה 26

א. נתון הביטוי:  
 $\frac{x^8 + 2x^4}{2x^5 - x^3}$

נפרק לגורמים את המונה ואת המכנה:

$$x^8 + 2x^4 = x^4x^4 + 2x^4 = x^4(x^4 + 2)$$

$$2x^5 - x^3 = 2x^3x^2 - x^3 = x^3(2x^2 - 1)$$

לפי חוק חיסור המעריכים:

$$\begin{aligned} \frac{x^8 + 2x^4}{2x^5 - x^3} &= \frac{x^4(x^4 + 2)}{x^3(2x^2 - 1)} = \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{x^4 + 2}{2x^2 - 1} = x^{4-3} \cdot \frac{x^4 + 2}{2x^2 - 1} \\ &= x^1 \cdot \frac{x^4 + 2}{2x^2 - 1} = \frac{x(x^4 + 2)}{2x^2 - 1} = \frac{x \cdot x^4 + 2x}{2x^2 - 1} = \frac{x^5 + 2x}{2x^2 - 1} \end{aligned}$$

דרך פתרון נוספת היא לחלק את המונה ואת המכנה ב־  $x^3$  (החזקה הגבוהה ביותר של  $x$  המופיעה כגורם בכל המחבורים במונה ובמכנה), לפי חוק חיסור המעריכים:

$$\begin{aligned}\frac{x^8 + 2x^4}{2x^5 - x^3} &= \frac{(x^8 + 2x^4) : x^3}{(2x^5 - x^3) : x^3} = \frac{x^8 : x^3 + 2x^4 : x^3}{2x^5 : x^3 - x^3 : x^3} \\ &= \frac{x^5 + 2x^1}{2x^2 - x^0} = \frac{x^5 + 2x}{2x^2 - 1}\end{aligned}$$

הערה: הביטוי המקורי אינו מוגדר עבור  $x = 0$ . לכן ניתן היה להניח ש־  $x \neq 0$  ולחלק את המונה והמכנה ב־  $x^3$ .

ב. לפי חוקי החזקות:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{x^3}{2^3} + \frac{(2x)^2}{3^2} = \frac{x^3}{8} + \frac{4x^2}{9} = \frac{9x^3 + 32x^2}{72}$$

ג. לפי חוקי החזקות והשברים:

$$xy^{-2} + x^2y^{-6} = x \cdot \frac{1}{y^2} + x^2 \cdot \frac{1}{y^6} = \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^6} = \frac{y^4x + x^2}{y^6}$$

$$\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^6 = \frac{(x^2)^2}{(y^3)^2} \frac{y^6}{x^6} = \frac{x^4y^6}{y^6x^6} = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \text{ד.}$$

השאלה בעמוד 89

## תשובה 27

$$(x+1)(x-6) = x^2 - 6x + x - 6 = x^2 - 5x - 6 \quad \text{א.}$$

$$(x-3)(y+1) = xy + x - 3y - 3 \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} &= \frac{x(1+x) + y(1+y)}{(1+y)(1+x)} = \frac{x + x^2 + y + y^2}{1 + x + y + xy} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + x + y}{xy + x + y + 1} \quad \text{ג.}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^{-1} \quad \text{ד. נתון הביטוי:}$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+1)^2} \quad \text{נתחיל מפשוט כל מחובר בנפרד:}$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^{-1} = \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{(x^2 - 1)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

כעת נפשט את הביטוי:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^{-1} &= \frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x-1)x^2 - (x+1)x}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{x^3 - x^2 - x^2 - x}{(x+1)^2(x-1)} \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)^2(x-1)}\end{aligned}$$

ניתן לפתוח סוגריים במכנה:

$$\begin{aligned}(x+1)^2(x-1) &= (x^2 + 2x + 1)(x-1) = x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1 \\ &= x^3 + x^2 - x - 1\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{x^3 - 2x^2 - x}{x^3 + x^2 - x - 1} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{-x + y^{-1}}{2 - xy^{-1}} = \frac{-x + \frac{1}{y}}{2 - \frac{x}{y}} \quad \text{ה.}$$

$$= \frac{y\left(-x + \frac{1}{y}\right)}{y\left(2 - \frac{x}{y}\right)} = \frac{-xy + 1}{2y - x} \quad \text{נכפול את המונה והמכנה ב-} y:$$

$$= \frac{xy - 1}{x - 2y} \quad \text{נכפול את המונה והמכנה ב-} -1:$$

1. לפי נוסחת הכפל המקוצר  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ :

$$(a^5 + 2a^6)^3 = (a^5)^3 + 3(a^5)^2 \cdot 2a^6 + 3a^5 \cdot (2a^6)^2 + (2a^6)^3$$

נפשט לפי חוקי החזקות:

$$\begin{aligned}&= a^{15} + 6a^{10}a^6 + 3a^5 \cdot 4(a^6)^2 + 8(a^6)^3 \\ &= a^{15} + 6a^{16} + 12a^5a^{12} + 8a^{18} \\ &= a^{15} + 6a^{16} + 12a^{17} + 8a^{18} \\ &= 8a^{18} + 12a^{17} + 6a^{16} + a^{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(a - \frac{2}{3}\right)\left(2 - \frac{a}{3}\right)\left(3 - \frac{2}{a}\right) &= \frac{3a-2}{3} \cdot \frac{6-a}{3} \cdot \frac{3a-2}{a} \\ &= \frac{(3a-2)(6-a)}{9} \cdot \frac{3a-2}{a} = \\ &= \frac{(3a-2)(6-a)(3a-2)}{9a}\end{aligned} \quad \text{2.}$$

נפשט את המונה:

$$\begin{aligned}(3a-2)(6-a)(3a-2) &= (3a-2)^2(6-a) \\ &= (9a^2 - 12a + 4)(6-a) \\ &= 54a^2 - 9a^3 - 72a + 12a^2 + 24 - 4a \\ &= -9a^3 + 66a^2 - 76a + 24\end{aligned}$$

נציב בביטוי השבר:

$$\left(a - \frac{2}{3}\right)\left(2 - \frac{a}{3}\right)\left(3 - \frac{2}{a}\right) = \frac{-9a^3 + 66a^2 - 76a + 24}{9a}$$

$$= -\frac{9a^3 - 66a^2 + 76a - 24}{9a}$$

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{3x}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2x - 3x}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{-x}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{-x}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{x^2}{16}\right)} = \frac{16}{x^2} \quad \text{ח.}$$

השאלה בעמוד 89

**תשובה 28**

א. נציב  $x = y^2$  בביטוי  $x^{100}$ . מתקבל הביטוי  $(y^2)^{100}$ . נפשט ביטוי זה לפי חוקי החזקות:

$$(y^2)^{100} = y^{2 \cdot 100} = y^{200}$$

ב. נציב  $x \rightarrow 1 - x$  בביטוי  $x + 1/x$ . מתקבל הביטוי הבא:

$$(1 - x) + \frac{1}{1 - x} = \frac{(1 - x)^2 + 1}{1 - x} = \frac{1 - 2x + x^2 + 1}{1 - x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{1 - x}$$

ג. נציב  $x = y/(y - 1)$  בביטוי  $x^2 + 2x + 3$ . מתקבל הביטוי:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + 2\frac{y}{y-1} + 3 &= \frac{y^2}{(y-1)^2} + 2\frac{y}{y-1} + 3 \\ &= \frac{y^2 + 2y(y-1) + 3(y-1)^2}{(y-1)^2} \\ &= \frac{y^2 + 2y^2 - 2y + 3(y^2 - 2y + 1)}{(y-1)^2} \\ &= \frac{3y^2 - 2y + 3y^2 - 6y + 3}{(y-1)^2} = \frac{6y^2 - 8y + 3}{y^2 - 2y + 1} \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 89

**תשובה 29**

א. נוכיח את הזהות:  $a^{50} - b^{50} = (a^{25} + b^{25})(a^{25} - b^{25})$

ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

נציב בנוסחה זו  $a \rightarrow a^{25}$ ,  $b \rightarrow b^{25}$  ונקבל:

$$(a^{25})^2 - (b^{25})^2 = (a^{25} + b^{25})(a^{25} - b^{25})$$

לפי חוקי החזקות,  $(a^{25})^2 = a^{25 \cdot 2} = a^{50}$

ובאותו אופן:  $(b^{25})^2 = b^{50}$

מכאן מתקבלת הזהות המבוקשת:  $a^{50} - b^{50} = (a^{25} + b^{25})(a^{25} - b^{25})$

ב. נוכיח את הזהות:

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$

ניעזר שוב בנוסחת הכפל המקוצר  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ . ממנה נקבל:

$$(a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

לפי חוקי החזקות, נובע מכאן

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

ושוב לפי אותה נוסחת כפל מקוצר,  $= (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

ג. נוכיח את הזהות:

$$(a^3 + b^4)^2 = a^6 + 2a^3b^4 + b^8$$

ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

נציב בנוסחה זו  $a \rightarrow a^3, b \rightarrow b^4$ , ונקבל:

$$(a^3 + b^4)^2 = (a^3)^2 + 2a^3b^4 + (b^4)^2$$

לפי חוקי החזקות,

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

ובאותו אופן:

$$(b^4)^2 = b^8$$

מכאן מתקבלת הזהות המבוקשת:

$$(a^3 + b^4)^2 = a^6 + 2a^3b^4 + b^8$$

ד. נוכיח את הזהות:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

נפשט את הביטוי שבאגף הימני, בעזרת חוק הפילוג:

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) &= a(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \\ &\quad + b(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \\ &\quad + c(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) \\ &= a^3 + \cancel{ab^2} + \cancel{ac^2} - \cancel{a^2b} - abc - \cancel{a^2c} \\ &\quad + \cancel{a^2b} + b^3 + \cancel{bc^2} - \cancel{ab^2} - \cancel{b^2c} - abc \\ &\quad + \cancel{a^2c} + \cancel{b^2c} + c^3 - abc - \cancel{bc^2} - \cancel{ac^2} \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 89

### תשובה 30

א. נתון הביטוי:

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x - 1}$$

נפרק לגורמים את המכנה הראשון -

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

כעת נוכל לחסר את השברים בעזרת המכנה המשותף  $x(x - 1)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x - 1} &= \frac{1}{x(x - 1)} - \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x(x - 1)} - \frac{x}{x(x - 1)} \\ &= \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \frac{(-1) \cdot (x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{-1}{x} = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{x^3 + 5x}{(xy)^2 + 2x^3 - xy} \quad \text{ב. נתון הביטוי:}$$

ניעזר בחוקי החזקות, ונוציא את הגורם המשותף  $x$  מחוץ לסוגריים במונה ובמכנה:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 5x}{(xy)^2 + 2x^3 - xy} &= \frac{x^2x + 5x}{x^2y^2 + 2x^3 - xy} = \frac{x(x^2 + 5)}{x(xy^2 + 2x^2 - y)} \\ &= \frac{x^2 + 5}{xy^2 + 2x^2 - y} \end{aligned}$$

$$\frac{x^8 - x^3}{(1+x)^2 - 1} \quad \text{ג. נתון הביטוי:}$$

נפרק לגורמים את המונה ואת המכנה:

$$\begin{aligned} x^8 - x^3 &= x^5 \cdot x^3 - x^3 = x^3(x^5 - 1) \\ (1+x)^2 - 1 &= (1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2) - 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x \\ &= x(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^8 - x^3}{(1+x)^2 - 1} &= \frac{x^3(x^5 - 1)}{x(x+2)} = \frac{x^2x(x^5 - 1)}{x(x+2)} \\ &= \frac{x^2(x^5 - 1)}{x+2} = \frac{x^7 - x^2}{x+2} \end{aligned} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{x}{xy + y^2} - \frac{y}{x^2 + xy} \quad \text{ד. נתון הביטוי:}$$

נפרק לגורמים את המכנים של השברים:  $xy + y^2 = xy + yx = y(x + y)$

$$x^2 + xy = xx + xy = x(x + y)$$

לכן הביטוי  $xy(x + y)$  הוא מכנה משותף של שני השברים. נחבר את השברים:

$$\begin{aligned} \frac{x}{xy + y^2} - \frac{y}{x^2 + xy} &= \frac{x}{y(x + y)} - \frac{y}{x(x + y)} \\ &= \frac{x \cdot x}{xy(x + y)} + \frac{y \cdot y}{xy(x + y)} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{xy(x + y)} \end{aligned}$$

כעת נפרק לגורמים את המונה, לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$\begin{aligned} &= \frac{(x + y)(x - y)}{xy(x + y)} \\ &= \frac{x - y}{xy} = \frac{x}{xy} - \frac{y}{xy} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 89

### תשובה 31

א. ניתן להוכיח את השוויון  $(2^x)^2 = 4^x$  בשתי הדרכים הבאות:

דרך ראשונה: לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל,

$$4^x = (2 \cdot 2)^x = 2^x \cdot 2^x = (2^x)^2$$

דרך שנייה: לפי חוק החזקה של חזקה,

$$(4^x) = (2^2)^x = 2^{2x} = 2^{x \cdot 2} = (2^x)^2$$

$$4^x = (2^x)^2$$

ב. לפי סעיף א:

$$4^y = (2^y)^2$$

ולכן (בהצבת  $y \rightarrow x$ ):

לכן, לפי נוסחאות הכפל המקוצר  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ :

$$\frac{4^x - 4^y}{2^x - 2^y} = \frac{(2^x)^2 - (2^y)^2}{2^x - 2^y} = \frac{(2^x + 2^y)(2^x - 2^y)}{2^x - 2^y} = 2^x + 2^y$$

השאלה בעמוד 90

### תשובה 32

א. לפי הזהות  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ :

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

ב. לפי נוסחת הכפל המקוצר  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

ג. ניעזר בשוויון שברמז:

$$2^3 + 2^2 + 2 = 8 + 4 + 2 = 14$$

משוויון זה, ומהזהויות שקיבלנו בסעיפים הקודמים, מתקבל:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x - 14 &= x^3 + x^2 + x - (2^3 + 2^2 + 2) \\ &= (x^3 - 2^3) + (x^2 - 2^2) + (x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2)(x + 2) + (x - 2) \cdot 1 \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + x + 2 + 1) \\ &= (x - 2)(x^2 + 3x + 7) \end{aligned}$$

## פתרונות לשאלות בשיעור 3

השאלה בעמוד 97

### תשובה 1

א. נתונה המשוואה

$$x + 5 = 20$$

נפחית 5 משני האגפים:

$$(x + 5) - 5 = 20 - 5$$

כלומר:

$$x = 15$$

נוודא ש-  $x = 15$  הוא אכן פתרון של המשוואה:

$$15 + 5 = 20$$

לכן  $x = 15$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$x - 3 = 7$$

ב. נתונה המשוואה

$$(x - 3) + 3 = 7 + 3$$

נוסיף 3 לשני האגפים:

$$x = 10$$

כלומר:

$$10 - 3 = 7$$

נוודא ש-  $x = 10$  הוא פתרון של המשוואה:

לכן  $x = 10$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$3 - x = 10$$

ג. נתונה המשוואה

$$-(3 - x) = -10$$

נבצע את פעולת הנגדי על שני האגפים:

$$x - 3 = -10$$

כלומר

$$(x - 3) + 3 = (-10) + 3$$

נוסיף 3 לשני האגפים:

$$x = -7$$

כלומר

$$3 - (-7) = 10$$

נוודא שקיבלנו פתרון:

לכן  $x = -7$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

**הערה:** ניתן לפתור משוואה זו גם באחת הדרכים הבאות:

$$3 = 10 + x$$

• הוספת  $x$  לשני האגפים:

$$-7 = x$$

חיסור 10 משני האגפים:

$$x = -7$$

כלומר

$$3 = 3$$

• נתחיל מהשוויון

$$3 - x = 10$$

נחסר ממנו את המשוואה הנתונה:

$$3 - (3 - x) = 3 - 10$$

נקבל:

$$x = -7$$

כלומר

$$5x = 10$$

ד. נתונה המשוואה

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$$

נחלק את שני האגפים ב-5:

$$x = 2$$

כלומר

$$5 \cdot 2 = 10$$

נוודא שקיבלנו פתרון:

לכן  $x = 2$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$2x + 3 = 15$$

ה. נתונה המשוואה

$$2x = 12$$

נחסר 3 משני האגפים:



נחלק את שני האגפים ב-2:  
 $x = 6$   
 נוודא שקיבלנו פתרון:  
 $6 \cdot 2 + 3 = 15$   
 לכן  $x = 6$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

ו. נתונה המשוואה  
 $\frac{x-2}{3} = 5$   
 נכפיל את שני האגפים ב-3:  
 $x - 2 = 15$   
 נוסיף 2 לשני האגפים:  
 $x = 17$   
 $\frac{17-2}{3} = 5$   
 נוודא שקיבלנו פתרון:  
 לכן  $x = 17$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

ז. נתונה המשוואה  
 $\frac{5}{2-x} = \frac{2}{3}$   
 נכפול באלכסון:  
 $5 \cdot 3 = 2(2-x)$   
 $15 = 4 - 2x$   
 לפי חוק הפילוג:  
 $15 + 2x = 4$   
 נוסיף  $2x$  לשני האגפים:  
 $2x = -11$   
 נחסר 15 משני האגפים:  
 $x = \frac{-11}{2} = -5\frac{1}{2}$   
 נחלק ב-2:  
 $\frac{5}{2 - (-5\frac{1}{2})} = \frac{5}{2 + 5\frac{1}{2}} = \frac{5}{7\frac{1}{2}} = \frac{5 \cdot 2}{7\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$   
 נציב ונוודא:  
 לכן  $x = -5\frac{1}{2}$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

ח. נתונה מערכת המשוואות:  
 $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 6 \end{cases}$   
 נחבר את שתי המשוואות:  
 $2x = 18$   
 נחלק ב-2:  
 $x = 9$   
 כעת נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה במערכת המקורית:  
 $2y = 6$   
 $y = 3$   
 נחלק את שני האגפים ב-2:  
 קיבלנו שאם  $x, y$  מקיימים את המשוואות אז  $x = 9, y = 3$ .  
 נוודא שערכים אלה הם פתרון של המערכת:

$\begin{cases} 9 + 3 = 12 \\ 9 - 3 = 6 \end{cases}$   
 התשובה חיובית ולכן  $x = 9, y = 3$  הוא הפתרון היחיד של המערכת.

ט. נתונה מערכת המשוואות:  
 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$   
 נחבר את שתי המשוואות:  
 $2x = 3$   
 נחלק ב-2:  
 $x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$   
 כעת נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה במערכת המקורית:  
 $2y = -1$

נחלק את שני האגפים ב־2:

$$y = -\frac{1}{2}$$

קיבלנו שאם  $x, y$  מקיימים את המשוואות אז  $x = 3/2, y = -1/2$ .

נוודא שערכים אלה הם פתרון של המערכת:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

התשובה חיובית ולכן  $x = 3/2, y = -1/2$  הוא הפתרון היחיד של המערכת.

י. נתונה המשוואה  $5(x+1) = (x+1)(x+2)$

נתבונן במקרים הבאים:

א.  $x+1 = 0$ . במקרה זה נקבל (על ידי הפחתת 1 משני האגפים) ש־ $x = -1$ .

ואכן,  $x = -1$  הוא פתרון של המשוואה:

$$5 \cdot ((-1) + 1) = 0 = ((-1) + 1) \cdot ((-1) + 2)$$

ב.  $x+1 \neq 0$ . במקרה זה נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה ב־ $x+1$ . נקבל:

$$x+2 = 5$$

$$x = 3$$

נפחית 2 משני האגפים:

נוודא ש־ $x = 3$  הוא אכן פתרון של המשוואה המקורית:

$$5 \cdot (3+1) = (3+1) \cdot (3+2)$$

לסיכום: פתרונות המשוואה הם  $x = -1$  ו־ $x = 3$ .

יא. נתונה המשוואה  $x^2 - 4 = 5(x+2)$

נציג את האגף השמאלי לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(1) \quad (x+2)(x-2) = 5(x+2)$$

נתבונן במקרים הבאים:

א.  $x+2 = 0$ . במקרה זה נקבל (על ידי הפחתת 2 משני האגפים) ש־ $x = -2$ .

ואכן,  $x = -2$  הוא פתרון של המשוואה:

$$(-2)^2 - 4 = 0 = 5 \cdot ((-2) + 2)$$

ב.  $x+2 \neq 0$ . במקרה זה נוכל לחלק את שני אגפי המשוואה (1) ב־ $x+2$ . נקבל:

$$x-2 = 5$$

$$x = 7$$

נוסיף 2 לשני האגפים:

נוודא ש־ $x = 7$  הוא אכן פתרון של המשוואה המקורית:

$$7^2 - 4 = 45 = 5 \cdot (7+2)$$

לסיכום: פתרונות המשוואה הם  $x = -2$  ו־ $x = 7$ .

יב. נתונה המשוואה  $(x+1)^2 = x^2 + 11$

נפשט את האגף השמאלי לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 11$$

$$2x + 1 = 11$$

נחסר  $x^2$  משני האגפים:

$$2x = 10$$

נחסר 1 משני האגפים:

השאלה בעמוד 100

נחלק את שני האגפים ב-2:  
 $x = 5$   
 נוודא שקיבלנו פתרון:  
 $(5 + 1)^2 = 36 = 5^2 + 11$   
 לכן הפתרון היחיד של המשוואה הוא  $x = 5$ .

## תשובה 2

א. נתונה המשוואה:  
 $2x + 3x - 4 = 16$   
 נוסיף 4 לשני האגפים:  
 $2x + 3x = 20$   
 נכנס איברים דומים:  
 $5x = 20$   
 נחלק ב-5:  
 $x = 4$   
 נציב ונוודא:  
 $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 4 = 8 + 12 - 4 = 16$   
 לכן  $x = 4$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

ב. נתונה המשוואה:  
 $3x + 7 = 5x - 9$   
 נחסר  $3x$ , ונוסיף 9 לשני האגפים:  
 $16 = 2x$   
 כלומר,  
 $2x = 16$   
 נחלק ב-2:  
 $x = 8$   
 נציב ונוודא:  
 $3 \cdot 8 + 7 = 31 = 5 \cdot 8 - 9$   
 לכן  $x = 8$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

ג. נתונה המשוואה:  
 $8 - x = \frac{x}{3} - 4$   
 נכפול ב-3:  
 $24 - 3x = x - 12$   
 נעביר אגפים:  
 $24 + 12 = x + 3x$   
 נכנס איברים דומים:  
 $36 = 4x$   
 כלומר  
 $4x = 36$   
 נחלק ב-4:  
 $x = 9$   
 נציב ונוודא:  
 $8 - 9 = -1 = \frac{9}{3} - 4$

לכן  $x = 9$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.  
 הערה: דרך פתרון נוספת היא להעביר אגפים ללא כפל ב-3, ולקבל ישירות מהמשוואה המקורית:

$8 + 4 = x + \frac{x}{3}$   
 לפי חוק הפילוג,  
 $x + \frac{x}{3} = 1 \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x = \left(1 + \frac{1}{3}\right)x = \frac{4}{3}x$

ולכן ניתן לכנס איברים באופן הבא:  
 $12 = \frac{4}{3}x$   
 כדי למצוא את ערכו של  $x$  נחלק ב- $\frac{4}{3}$ , כלומר, נכפיל ב- $\frac{3}{4}$ :

$\frac{3}{4} \cdot 12 = x$   
 $x = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$   
 וקיבלנו שוב את הפתרון

היתרון בדרך הפתרון הראשונה הוא בכך שבצעד הראשון (שבו הכפלנו במכנה) נפטרנו מהשברים במשוואה.

$$\frac{x}{x-7} = 10 \quad \text{ד. נתונה המשוואה:}$$

$$x = 10(x-7) \quad \text{נכפיל את שני האגפים ב-} x:$$

$$x = 10x - 70 \quad \text{נפשט, לפי חוק הפילוג:}$$

$$70 = 9x \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$x = \frac{70}{9} = 7\frac{7}{9} \quad \text{נחלק ב-9 (ונחליף את סדר האגפים):}$$

$$\frac{7\frac{7}{9}}{7\frac{7}{9}-7} = \frac{7\frac{7}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{70}{9} : \frac{7}{9} = \frac{630}{63} = 10 \quad \text{נציב ונוודא:}$$

לכן  $x = 7\frac{7}{9}$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$x+3 = 3(x-5) \quad \text{ה. נתונה המשוואה:}$$

$$x+3 = 3x-15 \quad \text{נפתח סוגריים, על פי חוק הפילוג:}$$

$$18 = 2x \quad \text{נעביר אגפים ונכנס איברים דומים:}$$

$$x = 9 \quad \text{נחלק ב-2:}$$

$$9+3 = 12 = 3 \cdot (9-5) \quad \text{נציב ונוודא:}$$

לכן  $x = 9$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$5\left(3 - \frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = 10 \quad \text{ו. נתונה המשוואה:}$$

$$15 - 5 \cdot \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 10 \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$5 = 5 \cdot \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$60 = 5 \cdot 4x - 3x \quad \text{נכפיל ב-12:}$$

$$60 = 20x - 3x \quad \text{כלומר}$$

$$17x = 60 \quad \text{נכנס איברים דומים:}$$

$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17} \quad \text{נחלק ב-17:}$$

$$5\left(3 - \frac{60}{17} : 3\right) + \frac{60}{17} : 4 = 5\left(3 - \frac{20}{17}\right) + \frac{15}{17} \quad \text{נציב ונוודא:}$$

$$= 15 - \frac{100}{17} + \frac{15}{17} = 15 - \frac{85}{17} = 15 - 5 = 10$$

לכן  $x = 60/17$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{3} = 3 \quad \text{ז. נתונה המשוואה:}$$

$$6 + x = 9x \quad \text{נכפיל ב-} 3x:$$

$$8x = 6 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{נחלק ב-8:}$$

$$2 : \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{נציב ונוודא:}$$

לכן  $x = 3/4$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$\frac{2x-1}{7+x} = \frac{2}{3} \quad \text{ח. נתונה המשוואה:}$$

$$3(2x-1) = 2(7+x) \quad \text{נכפול באלכסון:}$$

$$6x-3 = 14+2x \quad \text{נפשט לפי חוק הפילוג:}$$

$$4x = 17 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$x = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} \quad \text{נחלק ב-4:}$$

$$\frac{2 \cdot \frac{17}{4} - 1}{7 + \frac{17}{4}} = \frac{2 \cdot \frac{17}{4} - 1}{7 + \frac{17}{4}} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2 \cdot 17 - 4}{7 \cdot 4 + 17} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \quad \text{נציב ונוודא:}$$

לכן  $x = 17/4$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

השאלה בעמוד 102

### תשובה 3

א. פתרון המשוואה  $x-1=2$  הוא  $x=3$  (פתרון זה מתקבל על ידי הוספת 1 לשני האגפים).

$$(x-1)^2 = 4 \quad \text{ב. מהעלאת המשוואה בריבוע מתקבלת המשוואה}$$

$$x-1=2 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \quad \text{הגרייה הלוגית היא:}$$

$$(3-1)^2 = 4 \quad \text{ג. אכן מתקיים:}$$

$$:(x-1)^2 = 4 \quad \text{ד. גם הערך } x = -1 \text{ מקיים את המשוואה}$$

$$((-1)-1)^2 = (-2)^2 = 4$$

ערך זה אינו מקיים את המשוואה  $x-1=2$ :

$$(-1)-1 = -2 \neq 2$$

השאלה בעמוד 104

### תשובה 4

נוכיח את כלל ב:  $a=b$  אם ורק אם  $a-c=b-c$ .

אם  $a=b$  אז נפחית את  $c$  משני האגפים ונקבל:  $a-c=b-c$ .

אם  $a-c=b-c$  אז נחבר את  $c$  לשני האגפים ונקבל:  $a=b$ .

נוכיח את כלל ד: בהנחה ש- $c \neq 0$ ,  $a=b$  אם ורק אם  $a/c=b/c$ .

אם  $a=b$  אז נחלק את שני האגפים ב- $c$  (פעולה אפשרית כי  $c \neq 0$ ), ונקבל  $a/c=b/c$ .

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad \text{אם } a/c=b/c \text{ אז נכפיל את שני האגפים ב-} c \text{ ונקבל:}$$

$$\frac{a}{c}c = \frac{b}{c}c$$

$$.a=b, \text{ לכן}$$

השאלה בעמוד 104

### תשובה 5

א. נתונה המשוואה:

$$5-3x=10$$

$$\Leftrightarrow 5=10+3x$$

$$\Leftrightarrow -5=3x$$

$$\Leftrightarrow 3x=-5$$

נחבר  $3x$  לשני האגפים:

נפחית 10 משני האגפים:

נחליף בין האגפים:

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \quad \text{נחלק את שני האגפים ב-3:}$$

לכן הפתרון היחיד של המשוואה  $5 - 3x = 10$  הוא  $x = -5/3$ .

$$\frac{x+2}{3} = \frac{5x-4}{6} \quad \text{ב. נתונה המשוואה:}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2) = 5x-4 \quad \text{נכפיל את שני האגפים ב-6:}$$

$$\Leftrightarrow 2x+4 = 5x-4 \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\Leftrightarrow 8 = 3x \quad \text{נפחית } 2x \text{ ונוסיף } 4:$$

$$\Leftrightarrow 3x = 8 \quad \text{נחליף בין האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \quad \text{נחלק ב-3:}$$

לכן הפתרון היחיד של המשוואה הוא  $x = 8/3$ .

$$\frac{12-4x}{x} = 2 \quad \text{ג. נתונה המשוואה:}$$

מהמשוואה נובע ש-  $x \neq 0$  (כי אם  $x = 0$  אז האגף השמאלי אינו מוגדר).

לכן נפתור את המשוואה תחת הנחה זו.

נכפול ב- $x$  (ונקבל משוואה שקולה לפי ההנחה  $x \neq 0$ ):

$$\Leftrightarrow 12 - 4x = 2x$$

$$\Leftrightarrow 12 = 6x \quad \text{נוסיף } 4x \text{ לשני האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow 6x = 12 \quad \text{נחליף בין האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{נחלק ב-6:}$$

לכן הפתרון היחיד של המשוואה הוא  $x = 2$ .

השאלה בעמוד 105

## תשובה 6

נסמן ב- $x$  את מחירו של קילוגרם תפוחים בשקלים.

לפי הנתון, מחירו של קילוגרם אפרסקים הוא  $x + 7$  שקלים.

מחיר 2 ק"ג אפרסקים הוא  $2(x + 7)$ .

מחיר 3 ק"ג תפוחים הוא  $3x$ .

נתון שמחיר 2 ק"ג אפרסקים ו-3 ק"ג תפוחים הוא 54 שקלים. לכן:

$$2(x+7) + 3x = 54$$

$$\Leftrightarrow 2x + 14 + 3x = 54 \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3x = 40 \quad \text{נפחית 14 משני האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 40 \quad \text{נכנס איברים דומים:}$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \quad \text{נחלק ב-5:}$$

לכן מחיר קילוגרם תפוחים הוא 8 שקלים, ומחיר קילוגרם אפרסקים הוא 15 שקלים.

הערה: אם נבחר לסמן ב- $x$  את מחירו של ק"ג אפרסקים, יתקבל כי מחיר ק"ג תפוחים הוא

$$x-7, \text{ ותתקבל המשוואה: } 2x + 3(x-7) = 54$$

שפתרונה הוא  $x = 15$ . התוצאה הסופית (מחירי סוגי הפירות) תהיה, כמובן, זהה.

השאלה בעמוד 105

תשובה 7

נסמן ב- $x$  את השכר החודשי ההתחלתי של תמר, בשקלים.

לאחר 4 חודשים תמר קיבלה העלאת שכר בשיעור של 15%. סכום העלאת השכר הוא

$$15\% \cdot x = 0.15x$$

$$x + 0.15x = 1.15x$$

ולכן שכרה החודשי לאחר ההעלאה הוא

שכרה בשנה הראשונה מורכב מ-4 חודשים בשכר  $x$ , ו-8 חודשים בשכר  $1.15x$ . בסך הכול שכרה בשנה הראשונה היה 116,160 שקלים. לכן:

$$4x + 8 \cdot 1.15x = 116160$$

$$\Leftrightarrow 4x + 9.2x = 116160$$

כלומר,

$$\Leftrightarrow 13.2x = 116160$$

נכנס איברים דומים:

$$\Leftrightarrow x = \frac{116160}{13.2} = \frac{1161600}{132} = 8800$$

נחלק ב-13.2:

$$1.15x = 1.15 \times 8800 = 10120$$

נחשב את השכר לאחר ההעלאה:

שכרה החודשי של תמר בחודשים הראשונים היה 8800 שקלים. לאחר ההעלאה שכרה החודשי היה 10120 שקלים.

השאלה בעמוד 107

תשובה 8

נחשב את המרחק שעברה המשאית ב-5 הדקות הראשונות:

בשעה יש 60 דקות, ולכן 5 דקות הן  $5/60 = 1/12$  שעות. לפי הנוסחה  $s = vt$  (דרך = מהירות  $\times$  זמן), המרחק שעברה המשאית הוא

$$60 \times \frac{1}{12} = 5 \text{ ק"מ}$$

שימו לב שהמהירות היא בק"מ לשעה, הזמן הוא בשעות, ולכן המרחק שהתקבל הוא בקילומטרים.

נסמן ב- $t$  את הזמן שחלף מהרגע שמכונית המשטרה יצאה לדרכה ועד שהדביקה את המשאית. המרחק שעברה המשאית בזמן זה הוא, לפי אותה נוסחה:  $60t$   
לכן המשאית נמצאת ברגע המפגש במרחק  $5 + 60t$  מירושלים.

המרחק שעברה מכונית המשטרה בזמן זה הוא  $90t$ , וזה גם מרחקה של מכונית המשטרה מירושלים בזמן המפגש. מתקיים אפוא:

$$90t = 5 + 60t$$

נעביר אגפים ונכנס איברים דומים:

$$\Leftrightarrow 30t = 5$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

נחלק ב-30:

הזמן שלקח למשטרה להדביק את המשאית הוא שיטית השעה, כלומר 10 דקות.

$$\frac{1}{6} \times 90 = 15 \text{ ק"מ}$$

בזמן זה המרחק שעברה ניידת המשטרה הוא:

## השאלה בעמוד 107

## תשובה 9

נתחיל בחישוב מהירויותיהם של הרצים. הרץ המהיר רץ 400 מטרים ב־2 דקות, ולכן מהירותו (לפי הנוסחה  $v = s/t$ ) היא 200 מטרים בדקה.

הרץ האיטי רץ 400 מטר ב־3 דקות ולכן מהירותו היא  $400/3 \approx 133.33$  מטרים בדקה. בפעם הראשונה שבה הרץ המהיר יפגוש את הרץ האיטי, הוא יעקוף אותו בסיבוב שלם, ולכן המרחק שעבר הרץ המהיר עד לרגע זה הוא 400 מטר יותר מהמרחק שעבר הרץ האיטי. נסמן ב־ $t$  את הזמן (בדקות) שחלף עד שהרץ המהיר פגש את הרץ האיטי.

המרחק שעבר הרץ המהיר עד לרגע זה הוא:  $200t$

המרחק שעבר הרץ האיטי עד לרגע זה הוא:  $\frac{400}{3}t$

לפי האמור לעיל, מתקיים:  $200t = \frac{400}{3}t + 400$

נחלק את המשוואה ב־200:  $\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}t + 2$

נכפיל ב־3:  $\Leftrightarrow 3t = 2t + 6$

נעביר אגפים ונכנס איברים דומים:  $\Leftrightarrow t = 6$

מסקנה: הרץ המהיר ייפגש עם הרץ האיטי כעבור 6 דקות מתחילת הריצה.

ברגע המפגש, המרחק שעבר הרץ המהיר הוא

$$200 \cdot 6 = 1200 \text{ מטרים}$$

והמרחק שעבר הרץ האיטי הוא:  $\frac{400}{3} \cdot 6 = 800 \text{ מטרים}$

## השאלה בעמוד 108

## תשובה 10

כפי שראינו בדוגמה, הברז הראשון ממלא את הבריכה בקצב של 300 ליטרים לשעה, והברז השני ממלא אותה בקצב של 500 ליטרים לשעה. הברז השלישי (הנוסף) ממלא את הבריכה בקצב של  $3000/2 = 1500$  ליטרים בשעה.

נסמן (כמו בדוגמה) ב־ $t$  את הזמן (בשעות) שלקח לבריכה להתמלא.

בזמן זה מילא הברז הראשון  $300t$  ליטרים, הברז השני מילא  $500t$  ליטרים, והברז השלישי מילא  $1500t$  ליטרים. מתקבלת המשוואה:

$$300t + 500t + 1500t = 3000$$

נפשט:  $\Leftrightarrow 2300t = 3000$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3000}{2300} = \frac{30}{23} = 1\frac{7}{23}$$

הבריכה תתמלא לאחר שעה ו־ $7/23$  השעה. נחשב חלק זה בדקות:

$$\frac{7}{23} \cdot 60 = \frac{420}{23} \approx 18.26$$

הבריכה תתמלא אפוא לאחר כשעה ו־18 דקות.



## השאלה בעמוד 109

## תשובה 11

כעבור 3 שעות, חדרו לספינה  $150 = 3 \times 50$  ליטרים של מים. נסמן ב- $t$  את הזמן שיעבור מהרגע שבו התחיל ריקון המים מהספינה ועד שכל המים ינוקזו. כמות המים שתחדור לספינה מהזמן שבו החל הניקוז ועד לסיומו היא  $50t$ . כמות המים שתנוקז מהספינה מהזמן שבו החל הניקוז ועד לסיומו היא  $80t$ . כמות המים שהיתה בספינה ברגע תחילת הניקוז היא 150 ליטרים. בסיום הניקוז לא ייוותרו מים בספינה, ולכן:

$$\begin{aligned} 150 + 50t - 80t &= 0 \\ \Leftrightarrow 150 - 30t &= 0 && \text{כלומר:} \\ \Leftrightarrow 30t &= 150 \\ \Leftrightarrow t &= 5 \end{aligned}$$

ניקוז המים מהספינה יארך, אפוא, 5 שעות.

## השאלה בעמוד 109

## תשובה 12

א. כדי להמיר  $50^\circ F$  ליחידות צלזיוס, ניעזר בנוסחת ההמרה

$$F = C \cdot \frac{9}{5} + 32$$

ונציב בנוסחה זו  $F = 50$ . מתקבלת המשוואה:

$$\Leftrightarrow C \cdot \frac{9}{5} + 32 = 50$$

$$\Leftrightarrow C \cdot \frac{9}{5} = 18$$

נחסר 32 משני האגפים:

$$\Leftrightarrow C = 18 \cdot \frac{5}{9} = 10$$

נכפול את שני האגפים ב- $5/9$ :

50 מעלות פרנהייט הן אפוא 10 מעלות צלזיוס.

$$F = C \cdot \frac{9}{5} + 32$$

ב. נתבונן בנוסחת ההמרה

ונפתור אותה כמשוואה שבה הנעלם הוא  $C$ .

$$\Leftrightarrow C \cdot \frac{9}{5} = F - 32$$

נחסר 32 משני האגפים:

$$\Leftrightarrow C = \frac{(F - 32) \cdot 5}{9}$$

נכפול את שני האגפים ב- $5/9$ :

קיבלנו נוסחה להמרה מפרנהייט לצלזיוס. לדוגמה, אם נציב בנוסחה זו  $F = 50$  נקבל  $C = 10$ , בהתאם לתשובה בסעיף א.

## השאלה בעמוד 110

## תשובה 13

היו  $a, b, c$  מספרים ממשיים, ונניח שמתקיים  $abc = 0$ .

נוכיח ש- $a = 0$  או  $b = 0$  או  $c = 0$ .

ניתן להציג את המכפלה  $abc$  כך:  $abc = (ab) \cdot c$ . לכן מתקיים:  $(ab) \cdot c = 0$

לפי טענה 3.1, מתקיים  $ab = 0$  או  $c = 0$ . אם  $c = 0$  אז הוכחנו את המסקנה המתבקשת.

אם  $ab = 0$  אז (שוב לפי טענה 3.1),  $a = 0$  או  $b = 0$ , ולכן גם במקרה זה המסקנה נכונה.

לכן בכל מקרה מתקיימת המסקנה ש- $a = 0$  או  $b = 0$  או  $c = 0$ .  $\square$

השאלה בעמוד 111

## תשובה 14

א. המשוואה  $(2x-1)(5x-2)=0$  שקולה לכך ש- $2x-1=0$  או  $5x-2=0$ .  
נפתור בנפרד כל אחת ממשוואות אלה:

$$2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$5x-2=0 \Leftrightarrow 5x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$$

לכן פתרונות המשוואה  $(2x-1)(5x-2)=0$  הם  $x=1/2$  ו- $x=2/5$ .

ב. המשוואה  $x(x-5)(20-2x)=0$  שקולה לכך ש- $20-2x=0$  או  $x-5=0$  או  $x=0$ .  
נפתור את המשוואות  $20-2x=0$  ו- $x-5=0$ :

$$20-2x=0 \Leftrightarrow 2x=20 \Leftrightarrow x=10$$

$$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$$

לכן פתרונות המשוואה הם  $x=0$ ,  $x=5$  ו- $x=10$ .

ג. נתונה המשוואה  $x^4-3x^3=0$ . נפרק לגורמים את האגף השמאלי:

$$x^4-3x^3=x^3(x-3)=x \cdot x \cdot x \cdot (x-3)$$

מפירוק זה נובע ש- $x^4-3x^3=0$  אם ורק אם  $x=0$  או  $x-3=0$ .

לכן פתרונות המשוואה הם  $x=0$  ו- $x=3$ .

ד. נתונה המשוואה:

$$x^2+5x=2(x+5)$$

נפשט:

$$\Leftrightarrow x(x+5)=2(x+5)$$

$$\Leftrightarrow x(x+5)-2(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ או } x+5=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ או } x=-5$$

פתרונות המשוואה הם  $x=2$  ו- $x=-5$ .

ה. נתונה המשוואה:

$$(x-2)^3+3(x-2)^2=0$$

נוציא  $(x-2)^2$  מחוץ לסוגריים:

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot (x-2)+3(x-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x-2+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-2)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ או } x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ או } x=-1$$

פתרונות המשוואה הם  $x=-1$  ו- $x=2$ .

השאלה בעמוד 112

## תשובה 15

א. לפי טענה 3.5 פתרונות המשוואה  $x^2=2$  הם  $x=-\sqrt{2}$  ו- $x=\sqrt{2}$ .

ב. לפי אותה טענה, פתרונות המשוואה  $x^2=9$  הם  $x=-\sqrt{9}$  ו- $x=\sqrt{9}$ , כלומר,  
 $x=-3$  ו- $x=3$ .

ג. נתונה המשוואה  $(2x + 1)^2 = 4$ . נבטא אותה כך:

$$(2x + 1)^2 = 2^2$$

לפי טענה 3.4, משוואה זו שקולה לכך ש:

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 2 \text{ או } 2x + 1 = -2$$

נפתור כל אחת ממשוואות אלה בנפרד:

$$2x + 1 = 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2x + 1 = -2 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$$

לכן פתרונות המשוואה הם  $x = 0.5$  ו-  $x = -1.5$ .

ד. נתונה המשוואה  $(2 - x)^2 = -1$ . הביטוי באגף שמאל הוא ריבוע, ולפי חוקי הסימנים ריבוע של מספר אינו יכול להיות מספר שלילי. לכן משוואה זו לא מתקיימת עבור אף ערך של  $x$ . במילים אחרות, למשוואה אין פתרון.

ה. נתונה המשוואה:

$$(x + 5)^2 = (3x - 1)^2$$

לפי טענה 3.4, המשוואה שקולה ל:

$$\Leftrightarrow x + 5 = 3x - 1 \text{ או } x + 5 = -(3x - 1)$$

נפתור כל אחת מהמשוואות בנפרד:

$$x + 5 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

$$x + 5 = -(3x - 1) \Leftrightarrow x + 5 = 1 - 3x \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$$

לכן פתרונות המשוואה הם  $x = 3$  ו-  $x = -1$ .

ו. נתונה המשוואה:

$$(2 - x)^2 = (x - 6)^2$$

לפי טענה 3.4, המשוואה שקולה ל:

$$\Leftrightarrow 2 - x = x - 6 \text{ או } 2 - x = -(x - 6)$$

נפתור כל אחת מהמשוואות בנפרד:

$$2 - x = x - 6 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

$$2 - x = -(x - 6) \Leftrightarrow 2 - x = 6 - x \Leftrightarrow 2 = 6$$

המשוואה השנייה שקולה ל-  $2 = 6$ , שוויון שלא מתקיים אף פעם. לכן למשוואה השנייה אין פתרונות.

לכן הפתרון היחיד של המשוואה המקורית הוא  $x = 4$ .

השאלה בעמוד 113

## תשובה 16

א. נתונה המשוואה

$$2x^2 = 5x + 3$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית עם הפרמטרים הבאים:  $a = 2, b = -5, c = -3$

כדי לקבל את הצורה המתוקנת של המשוואה, נחלק ב-2:

$$\Leftrightarrow x^2 - 2.5x - 1.5 = 0$$

ב. נתונה המשוואה:  $2(5 - x^2) = 12x + 1$   
 נפתח סוגריים באגף שמאל:  
 $\Leftrightarrow 10 - 2x^2 = 12x + 1$   
 נעביר אגפים:  
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 10 + 12x + 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 12x - 9 = 0$   
 קיבלנו משוואה ריבועית עם הפרמטרים הבאים:  $a = 2, b = 12, c = -9$   
 כדי לקבל צורה מתוקנת נחלק ב-2:  
 $\Leftrightarrow x^2 + 6x - 4.5 = 0$

ג. נתונה המשוואה:  $(x + 1)(x + 2) = 6$   
 נפתח סוגריים באגף שמאל:  
 $\Leftrightarrow x^2 + x + 2x + 2 = 6$   
 נכנס איברים דומים:  
 $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 6$   
 נעביר אגפים:  
 $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$   
 קיבלנו משוואה ריבועית עם הפרמטרים הבאים:  $a = 1, b = 3, c = -4$   
 משוואה זו היא בצורה מתוקנת.

ד. נתונה המשוואה:  $x + \frac{1}{x} = 8$   
 מהמשוואה נובע ש-  $x \neq 0$ , כי עבור  $x = 0$  הביטוי  $1/x$  לא מוגדר. נניח מעתה ש-  
 $x \neq 0$  ונמשיך לפתור את המשוואה.  
 נכפול ב-  $x$ :  
 $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 8x$   
 נעביר אגפים:  
 $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 = 0$   
 קיבלנו משוואה ריבועית עם הפרמטרים הבאים:  $a = 1, b = -8, c = 1$   
 משוואה זו היא בצורה מתוקנת.

ה. נתונה המשוואה:  $\frac{x+5}{2x+1} = x+3$   
 מהמשוואה נובע ש-  $2x+1 \neq 0$ , כי אם  $2x+1 = 0$  אז אגף שמאל אינו מוגדר. נניח  
 מעתה ש-  $2x+1 \neq 0$  ונמשיך לפתור את המשוואה.  
 נכפול ב-  $2x+1$ :  
 $\Leftrightarrow x+5 = (2x+1)(x+3)$   
 נפתח סוגריים באגף ימין:  
 $\Leftrightarrow x+5 = 2x^2 + x + 6x + 3$   
 נכנס איברים דומים:  
 $\Leftrightarrow x+5 = 2x^2 + 7x + 3$   
 נעביר אגפים:  
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 2 = 0$   
 קיבלנו משוואה ריבועית עם הפרמטרים הבאים:  $a = 2, b = 6, c = -2$   
 כדי לקבל צורה מתוקנת, נחלק ב-2:  
 $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0$

השאלה בעמוד 115

**תשובה 17**

א. נתונה המשוואה:  $x^2 + 7x + 10 = 0$   
 נחפש פירוק מהצורה:  $x^2 + 7x + 10 = (x + \alpha)(x + \beta)$   
 מתקבלת מערכת המשוואות:  

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ \alpha\beta = 10 \end{cases}$$

פתרון למערכת זו הוא  $\alpha = 2, \beta = 5$ . לכן מתקיים:

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 10 &= (x + 2)(x + 5) \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x + 5) &= 0 \end{aligned}$$

והמשוואה המקורית שקולה ל-  
פתרונותיה הם  $x = -2$  ו- $x = -5$ .

ב. נתונה המשוואה:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= (x + \alpha)(x + \beta) \\ \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

נחפש פירוק מהצורה:  
מתקבלת מערכת המשוואות:

מהתנאי  $\alpha\beta = -8$  מתקבל שאחד המספרים  $\alpha, \beta$  חיובי והשני שלילי. מכאן ננחש את הפתרון  $\alpha = 4, \beta = -2$ . לכן מתקיים:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &= (x + 4)(x - 2) \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

והמשוואה המקורית שקולה ל-  
פתרונותיה הם  $x = -4$  ו- $x = 2$ .

ג. נתונה המשוואה:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 28 &= 0 \\ \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha\beta = -28 \end{cases} \end{aligned}$$

בדומה למקרים הקודמים נקבל את מערכת המשוואות:

מהתנאי  $\alpha\beta = -28$  מתקבל שאחד המספרים  $\alpha, \beta$  חיובי והשני שלילי. מכאן ננחש את הפתרון  $\alpha = 4, \beta = -7$ . לכן מתקיים:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 28 &= (x + 4)(x - 7) \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 7) &= 0 \end{aligned}$$

והמשוואה המקורית שקולה ל-  
פתרונותיה הם  $x = -4$  ו- $x = 7$ .

ד. נתונה המשוואה:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 15 &= 0 \\ \begin{cases} \alpha + \beta = -8 \\ \alpha\beta = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

בדומה למקרים הקודמים נקבל את מערכת המשוואות:

מהתנאי  $\alpha + \beta = -8$  מתקבל שלפחות אחד המספרים  $\alpha, \beta$  שלילי. מכאן ננחש את הפתרון  $\alpha = -3, \beta = -5$ . לכן מתקיים:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 15 &= (x - 3)(x - 5) \\ \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5) &= 0 \end{aligned}$$

והמשוואה המקורית שקולה ל-  
פתרונותיה הם  $x = 3$  ו- $x = 5$ .

## תשובה 18

א. נתונה המשוואה:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 7 &= 0 \\ (x + 4)^2 &= x^2 + 8x + 16 \end{aligned}$$

לפי נוסחאות הכפל המקוצר:  
כדי להשלים לריבוע, נחבר 9 לשני אגפי המשוואה המקורית:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 &= 9 \\ \Leftrightarrow (x + 4)^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x + 4 = 3 \text{ או } x + 4 = -3 \quad \text{לפי טענה 3.4}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ או } x = -7$$

לכן פתרונות המשוואה הם  $x = -1$  ו-  $x = -7$ .

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \quad \text{ב. נתונה המשוואה:}$$

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 \quad \text{לפי נוסחאות הכפל המקוצר:}$$

$$(x + 5)(x + 5) = 0 \quad \text{כלומר, } (x + 5)^2 = 0 \quad \text{לכן המשוואה שקולה למשוואה}$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{לפי טענה 3.3, זה שקול לכך ש- } x = -5 \quad \text{כלומר}$$

לכן הפתרון היחיד של המשוואה הוא  $x = -5$ .

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{ג. נתונה המשוואה:}$$

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9 \quad \text{לפי נוסחאות הכפל המקוצר:}$$

כדי להשלים לריבוע, נחבר 4 לשני אגפי המשוואה המקורית:

$$x^2 - 6x + 9 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 2 \text{ או } x - 3 = -2 \quad \text{לפי טענה 3.4}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ או } x = 1$$

לכן פתרונות המשוואה הם  $x = 1$  ו-  $x = 5$ .

$$x^2 - 8x + 10 = 0 \quad \text{ד. נתונה המשוואה:}$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 \quad \text{לפי נוסחאות הכפל המקוצר:}$$

כדי להשלים לריבוע, נחבר 6 לשני אגפי המשוואה המקורית:

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = \sqrt{6} \text{ או } x - 4 = -\sqrt{6} \quad \text{לפי טענה 3.5}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{6} \text{ או } x = 4 - \sqrt{6}$$

לכן פתרונות המשוואה הם  $x = 4 + \sqrt{6}$  ו-  $x = 4 - \sqrt{6}$ .

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{3} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ד.}$$

ה. לפי נוסחת הכפל המקוצר  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ :

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

$$= 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$$

ו. לפי נוסחת הכפל המקוצר  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ :

$$(2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7}) = 2^2 - (\sqrt{7})^2 = 4 - 7 = -3$$

ז. נכפיל את המונה והמכנה ב-  $2 + \sqrt{7}$ , וניעזר בתוצאת הסעיף הקודם:

$$\frac{1}{2 - \sqrt{7}} = \frac{1 \cdot (2 + \sqrt{7})}{(2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7})} = \frac{2 + \sqrt{7}}{-3} = -\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$$

ח. נכפיל מונה ומכנה ב-  $\sqrt{8} + \sqrt{7}$ :

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{8} + \sqrt{7})}{(\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8} + \sqrt{7})} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{2}\sqrt{8} + \sqrt{7} + \sqrt{2}\sqrt{7}}{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{16} + \sqrt{7} + \sqrt{14}}{8 - 7} = 4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{7} + \sqrt{14}$$

השאלה בעמוד 118

## תשובה 20

א. נתונה המשוואה:

$$x^2 + 8x - 2 = 0$$

כדי להשלים לריבוע, נוסיף 18 לשני האגפים:

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 18$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow x + 4 = \sqrt{18} \text{ או } x + 4 = -\sqrt{18}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 + \sqrt{18} \text{ או } x = -4 - \sqrt{18}$$

נפשט את  $\sqrt{18}$ :

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

לכן פתרונות המשוואה הם  $x = -4 + 3\sqrt{2}$  ו-  $x = -4 - 3\sqrt{2}$ .

ב. נתונה המשוואה:

$$15x^2 - x - 2 = 0$$

כדי להעביר לצורה מתוקנת, נחלק ב-15:

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{2}{15} = 0$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{15}x = \frac{2}{15}$$

לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$\left(x - \frac{1}{30}\right)^2 = x^2 - \frac{2}{30}x + \left(\frac{1}{30}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{1}{900}$$

כדי להשלים לריבוע, נוסיף  $1/900$  לשני האגפים במשוואה שקיבלנו קודם:

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{15}x + \frac{1}{900} = \frac{2}{15} + \frac{1}{900} = \frac{60 \cdot 2 + 1}{900} = \frac{121}{900}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{30}\right)^2 = \left(\frac{11}{30}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{30} = \frac{11}{30} \text{ או } x - \frac{1}{30} = -\frac{11}{30}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{30} + \frac{11}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \text{ או } x = \frac{1}{30} - \frac{11}{30} = \frac{-10}{30} = -\frac{1}{3}$$

פתרונות המשוואה הם  $x = -1/3$  ו-  $x = 2/5$ .

$$3x^2 + 5x - 12 = 0$$

ג. נתונה המשוואה:

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{3}x - 4 = 0 \quad \text{כדי להעביר לצורה מתוקנת, נחלק ב-3:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{3}x = 4 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

לפי נוסחת הכפל המקוצר:

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = x^2 - \frac{10}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}$$

כדי להשלים לריבוע, נוסיף  $25/36$  לשני האגפים במשוואה שקיבלנו קודם:

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = 4 + \frac{25}{36} = \frac{4 \cdot 36 + 25}{36} = \frac{169}{36}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{5}{6} = \frac{13}{6} \text{ או } x + \frac{5}{6} = -\frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{6} + \frac{13}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ או } x = -\frac{5}{6} - \frac{13}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

פתרונות המשוואה הם  $x = 4/3$  ו-  $x = -3$ .

השאלה בעמוד 120

## תשובה 21

$$x^2 + 10x + 9 = 0$$

א. נתונה המשוואה

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64$$

נחשב את הדיסקרימיננטה:

הדיסקרימיננטה חיובית, לכן יש שני פתרונות שונים:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = \frac{-10 - 8}{2} = -9, \quad x_2 = \frac{-10 + 8}{2} = -1$$

פתרונות המשוואה הם

$$5x^2 - 9x - 4 = 0$$

ב. נתונה המשוואה:

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 81 + 80 = 161$$

נחשב את הדיסקרימיננטה:

הדיסקרימיננטה חיובית, לכן יש שני פתרונות שונים:

$$x_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{161}}{2 \cdot 5} = \frac{9 \pm \sqrt{161}}{10}$$

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{161}}{10}, \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{161}}{10}$$

פתרונות המשוואה הם



ג. נתונה המשוואה:  $x^2 - x - 1 = 0$

נחשב את הדיסקרימיננטה:  $\Delta = 1^2 + 4 \cdot 1 = 5$

הדיסקרימיננטה חיובית, לכן יש שני פתרונות שונים:  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

הערה: המספר  $(1 + \sqrt{5})/2$ , שנהוג לסמנו באות היוונית  $\varphi$  (פי), נקרא **יחס הזהב** או

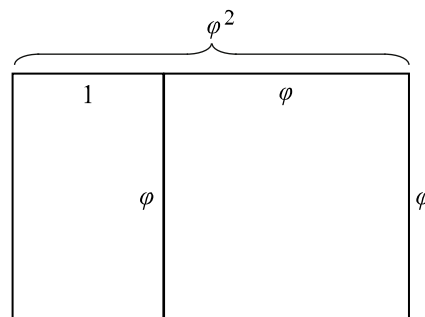
**חתך הזהב**. לפי האמור לעיל, מספר זה מקיים את המשוואה  $x^2 - x - 1 = 0$ , ולכן

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

מלבנים אשר היחס בין אורכי צלעותיהם הוא יחס הזהב מופיעים באמנות

ובארכיטקטורה בשל ערכם האסתטי. מהזהות  $\varphi^2 = \varphi + 1$  נובע שאם נקצה בתוך מלבן

בעל יחס הזהב ריבוע, כמתואר באיור, המלבן הנותר יהיה אף הוא בעל יחס הזהב.



ד. נתונה המשוואה:  $9x^2 + 30x + 25 = 0$

נחשב את הדיסקרימיננטה:  $\Delta = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900 - 900 = 0$

הדיסקרימיננטה מתאפסת, לכן יש למשוואה פתרון יחיד והוא:

$$x = \frac{-30 + \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{-30}{18} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$$

ה. נתונה המשוואה:  $x^2 + 6x + 10 = 0$

נחשב את הדיסקרימיננטה:  $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 10 = -4$

הדיסקרימיננטה שלילית, לכן למשוואה אין פתרון.

השאלה בעמוד 120

## תשובה 22

א. נתבונן במשוואה (1)  $3x^2 + 7x = a$

נעביר אגפים במשוואה זו:  $\Leftrightarrow 3x^2 + 7x - a = 0$

קיבלנו משוואה ריבועית בנעלם  $x$ . נמצא את הדיסקרימיננטה שלה:

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-a) = 49 + 12a$$

כדי שלמשוואה (1) יהיה פתרון אחד ויחיד, צריך להתקיים  $\Delta = 0$ , כלומר:

$$49 + 12a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{49}{12}$$

לכן למשוואה  $3x^2 + 7x = a$  יש פתרון אחד ויחיד אם ורק אם  $a = -49/12$ .

ב. נתבונן במשוואה (2)  $5x^2 + (2-a)x + a = 0$

משוואה זו היא משוואה ריבועית בנעלם  $x$ . נחשב את הדיסקרימיננטה שלה:

$$\Delta = (2-a)^2 - 4 \cdot 5 \cdot a = (2-a)^2 - 20a$$

כדי שלמשוואה (2) יהיה פתרון אחד ויחיד, צריך להתקיים  $\Delta = 0$ , כלומר:

$$(2-a)^2 - 20a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4a + a^2 - 20a = 0 \quad \text{לפי נוסחת הכפל המקוצר:}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 24a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 16}}{2} = 12 \pm \frac{\sqrt{560}}{2} \quad \text{לפי נוסחת השורשים:}$$

$$= 12 \pm \frac{\sqrt{560}}{\sqrt{4}} = 12 \pm \sqrt{140} = 12 \pm 2\sqrt{35}$$

לכן למשוואה  $5x^2 + (2-a)x + a = 0$  יש שורש יחיד אם ורק אם  $a = 12 + 2\sqrt{35}$  או  $a = 12 - 2\sqrt{35}$ .

השאלה בעמוד 120

## תשובה 23

א. נתונה המשוואה:  $x + \frac{1}{x} = 5$

מהמשוואה נובע ש-  $x \neq 0$ , כי עבור  $x = 0$  אגף שמאל אינו מוגדר.

נמשיך לפתור תחת הנחה זו. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-  $x$ :

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 5x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{לפי נוסחת השורשים:}$$

שני הפתרונות שמצאנו שונים מ-0. לפיכך, אלה הם פתרונות של המשוואה, והם פתרונותיה היחידים.

ב. נתונה המשוואה:  $x(x+3) = 12$

נפתח סוגריים ונעביר אגפים:  $x^2 + 3x - 12 = 0$

לפי נוסחת השורשים, פתרונות המשוואה הם

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

ג. נתונה המשוואה:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}$

מהמשוואה נובע ש-  $x \neq 0$  ו-  $x \neq 1$ , כי עבור הערכים  $x = 0, 1$  אגף שמאל אינו מוגדר. נמשיך לפתור תחת הנחה זו. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-  $x(x-1)$ :

$$\Leftrightarrow (x-1) + x = \frac{3}{2}x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{3}{2}(x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2 = 3(x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2 = 3x^2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

נפתור משוואה זו לפי נוסחת השורשים:

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

פתרונות המשוואה  $3x^2 - 7x + 2 = 0$  הם  $x = 1/3$  ו-  $x = 2$ . פתרונות אלה שונים מ-0 ומ-1, ולכן אלה הם גם פתרונות המשוואה המקורית.

ד. נתונה המשוואה:  $(x+1)^3 = x(x+3)(x+4)$

נפשט את אגף שמאל לפי הנוסחה  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , ונפתח סוגריים באגף ימין:

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x(x^2 + 3x + 4x + 12)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x(x^2 + 7x + 12)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 7x^2 + 12x$$

נעביר אגפים (שימו לב שהביטוי  $x^3$  מתבטל):

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 9x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 16}}{8} = \frac{-9 \pm \sqrt{97}}{8}$$

לפי נוסחת השורשים:

ה. נתונה המשוואה:  $(2x+1)(3x+5) = x^2 - 3$

נפתח סוגריים:

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 3x + 10x + 5 = x^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 13x + 5 = x^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 13x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 160}}{10} = \frac{-13 \pm 3}{10}$$

לפי נוסחת השורשים:

פתרונות המשוואה הם אפוא  $x = -1$  ו-  $x = -1.6$ .

ו. נתונה המשוואה:  $\frac{3x+1}{4-x} = \frac{9x-3}{x+2}$

מהמשוואה נובע ש-  $x \neq 4$  ו-  $x \neq -2$ , כי עבור הערכים  $x = 4, -2$  המכנים במשוואה מתאפסים. נמשיך לפתור תחת הנחה זו. נכפול באלכסון:

$$\Leftrightarrow (3x+1)(x+2) = (9x-3)(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + x + 2 = 36x - 9x^2 - 12 + 3x \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 39x - 9x^2 - 12$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 32x + 14 = 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 16x + 7 = 0 \quad \text{נחלק ב-2 (לפישוט החישוב):}$$

לפי נוסחת השורשים:

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 24 \cdot 7}}{12} = \frac{16 \pm \sqrt{88}}{12} = \frac{8 \pm \sqrt{22}}{6}$$

פתרונות אלה שונים מ-4 ומ-2 ולכן הם גם פתרונות המשוואה המקורית.

השאלה בעמוד 122

## תשובה 24

א. כדי לפרק לגורמים את הביטוי  $2x^2 - x - 15$ , נפתור תחילה את המשוואה  $2x^2 - x - 15 = 0$ , לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 30}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4}$$

$$x_1 = \frac{1 - 11}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{כלומר}$$

לפי נוסחת הפירוק  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  נקבל:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 15 &= 2 \left( x - \left( -\frac{5}{2} \right) \right) (x - 3) = 2 \left( x + \frac{5}{2} \right) (x - 3) \\ &= (2x + 5)(x - 3) \end{aligned}$$

ב. כדי לפרק את הביטוי  $6x^2 + 13x - 8$ , נפתור את המשוואה  $6x^2 + 13x - 8 = 0$ :

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 24 \cdot 8}}{12} = \frac{-13 \pm \sqrt{361}}{12} = \frac{-13 \pm 19}{12}$$

$$x_1 = \frac{-13 - 19}{12} = -\frac{32}{12} = -\frac{8}{3}, \quad x_2 = \frac{-13 + 19}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{כלומר}$$

לפי נוסחת הפירוק:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 13x - 8 &= 6 \left( x + \frac{8}{3} \right) \left( x - \frac{1}{2} \right) = 3 \left( x + \frac{8}{3} \right) \cdot 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \\ &= (3x + 8)(2x - 1) \end{aligned}$$

ג. נציג תחילה את הביטוי  $14 - 5x - x^2$  בצורה התקנית  $ax^2 + bx + c$ :

$$14 - 5x - x^2 = -x^2 - 5x + 14 = (-1) \cdot x^2 + (-5) \cdot x + 14$$

כדי לפרק את הביטוי, נפתור את המשוואה  $-x^2 - 5x + 14 = 0$

כדי לפשט את החישוב נכפול משוואה זו ב-1:  $x^2 + 5x - 14 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} \quad \text{נפתור:}$$

$$x_1 = \frac{-5 - 9}{2} = \frac{-14}{2} = -7, \quad x_2 = \frac{-5 + 9}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{כלומר}$$

השאלה בעמוד 125

לפי נוסחת הפירוק:

$$14 - 5x - x^2 = (-1) \cdot x^2 + (-5) \cdot x + 14 = (-1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 7) \\ = -(x - 2)(x + 7) = (2 - x)(x + 7)$$

## תשובה 25

א. נתונה המערכת:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 7 \\ 5x - 6y = -3 \end{cases}$$

נחלק את  $x$  מהמשוואה הראשונה:  $(1) \Rightarrow x = \frac{7 + 5y}{4}$

נציב במשוואה השנייה:  $\Rightarrow 5 \cdot \frac{7 + 5y}{4} - 6y = -3$

נכפול ב-4:  $\Rightarrow 5(7 + 5y) - 24y = -12$

נפשט:  $\Rightarrow 35 + 25y - 24y = -12$

$\Rightarrow y = -12 - 35 = -47$

נציב ערך זה במשוואה (1):  $\Rightarrow x = \frac{7 - 5 \cdot 47}{4} = \frac{-228}{4} = -57$

כעת נוודא שקיבלנו פתרון:  $\begin{cases} 4 \cdot (-57) - 5 \cdot (-47) = -228 + 235 = 7 \\ 5 \cdot (-57) - 6 \cdot (-47) = -285 + 282 = -3 \end{cases}$

לסיכום: למערכת יש פתרון יחיד והוא  $x = -57, y = -47$ .

ב. נתונה המערכת:  $\begin{cases} \frac{2x}{3} = \frac{5y}{2} + 4 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$

בפתרון מערכת זו נדגים שימוש בסדרת מעברי שקילות.

נחלק את  $x$  במשוואה השנייה:  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{3} = \frac{5y}{2} + 4 \\ x = \frac{10 + 2y}{3} \end{cases}$

נציב את  $x$  מהמשוואה השנייה במשוואה הראשונה:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{10 + 2y}{3} = \frac{5y}{2} + 4 \\ x = \frac{10 + 2y}{3} \end{cases}$$

נפתור בנפרד את המשוואה הראשונה:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{10 + 2y}{3} = \frac{5y}{2} + 4 \Leftrightarrow \frac{20 + 4y}{9} = \frac{5y + 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow 40 + 8y = 45y + 72 \Leftrightarrow -37y = 32$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{32}{37}$$

לכן מערכת המשוואות שקולה למערכת הבאה:  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{32}{37} \\ x = \frac{10 + 2y}{3} \end{cases}$

נציב את ערכו של  $y$  במשוואה השנייה:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{32}{37} \\ x = \frac{1}{3} \left( 10 + 2 \left( -\frac{32}{37} \right) \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{370 - 64}{37} = \frac{1}{3} \cdot \frac{306}{37} = \frac{102}{37} \end{cases}$$

קיבלנו שלמערכת יש פתרון יחיד והוא:  $x = 102/37$ ,  $y = -32/37$ .

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \quad \text{ג. נתונה המערכת:}$$

 $\Rightarrow y = 7 - x$  נחלק את  $y$  מהמשוואה הראשונה: $\Rightarrow x(7 - x) = 12$  נציב במשוואה השנייה: $\Rightarrow 7x - x^2 = 12$  נפשט:

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \quad \text{נפתור את המשוואה הריבועית:}$$

לכן הערכים האפשריים של  $x$  הם 3 ו-4.מהמשוואה  $x + y = 7$  נקבל שאם  $x = 3$  אז  $y = 4$  ואם  $x = 4$  אז  $y = 3$ .

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{ו} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{לכן הפתרונות האפשריים של המערכת הם:}$$

$$\begin{cases} 3 + 4 = 4 + 3 = 7 \\ 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12 \end{cases} \quad \text{הצבה במערכת המקורית מראה שאלה אכן פתרונות:}$$

לכן יש למערכת שני פתרונות כמתואר לעיל, והם הפתרונות היחידים.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y-1} = \frac{5}{2} \\ xy = -\frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{ד. נתונה המערכת:}$$

$$y = \frac{-5}{6x} \quad \text{מהמשוואה השנייה נקבל:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{5}{6x} - 1} = \frac{5}{2} \quad \text{נציב במשוואה הראשונה:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\frac{5}{6x} - 1} = \frac{1}{-\left(\frac{5}{6x} + 1\right)} = (-1) : \frac{5 + 6x}{6x} = -\frac{6x}{5 + 6x} \quad \text{נפשט:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{6x}{5 + 6x} = \frac{5}{2} \quad \text{מתקבלת המשוואה הבאה:}$$

$$\Rightarrow 5 + 6x - 6x^2 = \frac{5}{2}x(5 + 6x) \quad \text{נכפיל את שני האגפים ב-} x(5 + 6x):$$

$$\Rightarrow 10 + 12x - 12x^2 = 5x(5 + 6x) \quad \text{נכפיל ב-2:}$$

$$\Rightarrow 10 + 12x - 12x^2 = 25x + 30x^2 \quad \text{נפשט:}$$

$$\Rightarrow 42x^2 + 13x - 10 = 0$$

לפי נוסחת השורשים:

$$\Rightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 42 \cdot 40}}{84} = \frac{-13 \pm \sqrt{1849}}{84} = \frac{-13 \pm 43}{84}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-13 - 43}{84} = -\frac{56}{84} = -\frac{2}{3} \text{ או } x = \frac{-13 + 43}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

נציב כל אחד מערכים אפשריים אלה במשוואה  $y = -5/(6x)$ :

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{-5}{6x} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{14} \Rightarrow y = \frac{-5}{6x} = (-5) : \frac{30}{14} = -\frac{5 \cdot 14}{30} = -\frac{70}{30} = -\frac{7}{3}$$

$$\begin{cases} x = -2/3 \\ y = 5/4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 5/14 \\ y = -7/3 \end{cases} \quad \text{קיבלנו כי למערכת יש שני פתרונות אפשריים:}$$

נוודא כי אלה אכן פתרונות של המערכת:

$$\begin{cases} \frac{1}{5/14} + \frac{1}{-7/3-1} = \frac{14}{5} - \frac{3}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \\ \frac{5}{14} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{35}{42} = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{-2/3} + \frac{1}{5/4-1} = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

לכן יש למערכת שני פתרונות כמתואר לעיל, והם הפתרונות היחידים.

השאלה בעמוד 127

## תשובה 26

א. נפתור את המערכת

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 16 \\ 9x - 6y = 75 \end{cases} \quad \text{נכפיל את המשוואה הראשונה ב-2 ואת השנייה ב-3:}$$

$$\Rightarrow 13x = 91 \quad \text{נחבר את שתי המשוואות:}$$

$$\Rightarrow x = 7 \quad \text{נחלק ב-7:}$$

$$\Rightarrow 2x = 14 \quad \text{קיבלנו את ערכו של } x \text{ כעת נכפיל ב-2:}$$

$$\Rightarrow 3y = 8 - 14 = -6 \quad \text{נחסר משוואה זו מהמשוואה } 2x + 3y = 8:$$

$$\Rightarrow y = -2 \quad \text{ומכאן}$$

נוודא כי הערכים  $x = 7$ ,  $y = -2$  הם אכן פתרון של המערכת:

$$\begin{cases} 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) = 14 - 6 = 8 \\ 3 \cdot 7 - 2 \cdot (-2) = 21 + 4 = 25 \end{cases}$$

קיבלנו כי למערכת יש פתרון אחד ויחיד, והוא הפתרון  $x = 7$ ,  $y = -2$ .

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ 7x + 3y = 4 \end{cases}$$

ב. נפתור את המערכת

$$\Rightarrow \begin{cases} 24x - 6y = 15 \\ 14x + 6y = 8 \end{cases} \quad \text{נכפיל את המשוואה הראשונה ב-3 ואת השנייה ב-2:}$$

$$\Rightarrow 38x = 23 \quad \text{נחבר את שתי המשוואות:}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23}{38} \quad \text{נחלק ב-38:}$$

$$\Rightarrow 7x = \frac{161}{38} \quad \text{קיבלנו את ערכו של } x \text{ כעת נכפיל ב-7:}$$

$$\Rightarrow 3y = 4 - \frac{161}{38} = -\frac{9}{38} \quad \text{נחסר משוואה זו מהמשוואה } 7x + 3y = 4:$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{38} \quad \text{ומכאן}$$

נוודא כי הערכים  $x = 23/38$ ,  $y = -3/38$  הם אכן פתרון של המערכת:

$$\begin{cases} 8 \cdot \frac{23}{38} - 2 \cdot \frac{-3}{38} = \frac{8 \cdot 23 + 2 \cdot 3}{38} = \frac{190}{38} = 5 \\ 7 \cdot \frac{23}{38} + 3 \cdot \frac{-3}{38} = \frac{7 \cdot 23 - 3 \cdot 3}{38} = \frac{152}{38} = 4 \end{cases}$$

קיבלנו כי למערכת יש פתרון אחד ויחיד, והוא הפתרון  $x = 23/38$ ,  $y = -3/38$ .

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 9y = 8 \end{cases}$$

ג. נפתור את המערכת

$$3x + 9y = 9 \quad \text{נכפיל את המשוואה הראשונה ב-3:}$$

$$0 = 1 \quad \text{נחסר מהמשוואה שהתקבלה את המשוואה השנייה במערכת:}$$

קיבלנו כמסקנה מהמשוואות שוויון שגוי, כלומר הגענו לסתירה. לכן למערכת אין פתרון.

השאלה בעמוד 128

**תשובה 27**

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 9y = 9 \end{cases}$$

נתבונן במערכת

המשוואה השנייה במערכת זו מתקבלת מהכפלת המשוואה הראשונה ב-3. לכן כל זוג ערכים  $x$  ו- $y$  המקיים את המשוואה הראשונה, מקיים גם את המשוואה השנייה.מהבחינה זו נובע שהמערכת כולה שקולה למשוואה הבודדת  $x + 3y = 3$ . נראה שלמשוואה זו יש אינסוף פתרונות:

$$x = 3 - 3y \quad \text{לכל ערך } y \text{ שנבחר, ניתן להתאים את ערך } x \text{ הבא:}$$

$$x + 3y = 3 \quad \text{עבור ערך זה יתקיים השוויון}$$

לדוגמה, אם נבחר  $y = 7$ , יתקבל  $x = 3 - 21 = -18$ . זוג ערכים זה מקיים את המשוואה  $x + 3y = 3$  ולכן את כל מערכת המשוואות המקורית.מכיוון שניתן לבחור אינסוף ערכים עבור  $y$  (כל מספר ממשי), יש אינסוף פתרונות למערכת.



## תשובה 28

א. נתונה המשוואה  $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$

נגדיר  $t = x^2$ . מתקבלת המשוואה  $t^2 + 6t + 8 = 0$

נפתור:  $t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = -3 \pm 1$

פתרונות המשוואה הם  $t = -2$  ו-  $t = -4$ . שני ערכים אלה הם שליליים, ולכן לא יכולים להיות שווים ל-  $x^2$ . לכן למשוואה המקורית אין פתרון.

ב. נתונה המשוואה  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

נגדיר  $t = x^2$ . מתקבלת המשוואה  $t^2 - 3t + 2 = 0$

נפתור:  $t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$t = 2$  או  $t = 1$

כעת נחזור למשוואה המקורית:  $t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$t = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

לכן למשוואה המקורית יש ארבעה פתרונות, והם:  $1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ .

ג. נתונה המערכת:

$$\begin{cases} 5x = \frac{2}{y} + 3 \\ \frac{4}{y} = 8 + 3x \end{cases}$$

נגדיר  $z = 2/y$ . מתקבלת המערכת:

$$\begin{cases} 5x = z + 3 \\ 2z = 8 + 3x \end{cases}$$

קיבלנו מערכת של משוואות לינאריות. כדי לפתור, נחליף את  $z$  מהמשוואה הראשונה:

$\Rightarrow z = 5x - 3$

נציב במשוואה השנייה:  $\Rightarrow 2(5x - 3) = 8 + 3x$

נפשט:  $\Rightarrow 10x - 6 = 8 + 3x$

$\Rightarrow 7x = 14$

$\Rightarrow x = 2$

נציב במשוואה  $z = 5x - 3$ :  $\Rightarrow z = 5 \cdot 2 - 3 = 7$

נציב בהגדרה  $z = 2/y$ :  $\Rightarrow \frac{2}{y} = 7 \Rightarrow 7y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{7}$

נוודא את נכונות הפתרון שקיבלנו:

$$\begin{cases} 5 \cdot 2 = 10 = \frac{2}{2/7} + 3 \\ \frac{4}{2/7} = 14 = 8 + 3 \cdot 2 \end{cases}$$

לכן למערכת יש פתרון אחד ויחיד:  $x = 2, y = 2/7$ .

ד. נתונה המערכת:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 y^2 = 16 \end{cases} \quad \text{נעלה את המשוואה השנייה בריבוע:}$$

$$a = x^2, b = y^2 \quad \text{נגדיר את המשתנים הבאים:}$$

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ ab = 16 \end{cases} \quad \text{מתקבלת מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(10 - b)b = 16 \quad \text{נחלק: } a = 10 - b \text{ ונציב במשוואה השנייה:}$$

$$10b - b^2 = 16$$

$$b^2 - 10b + 16 = 0$$

$$b = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3 \quad \text{נפתור את המשוואה הריבועית:}$$

לכן  $b = 2$  או  $b = 8$ . נבחן כל אחת מהאפשרויות:

• אם  $b = 2$  אז (לפי המשוואה  $a + b = 10$ ),  $a = 8$ . נקבל משוואות במשתנים  $x, y$ :

$$\begin{cases} x^2 = 8 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{ממשוואות אלה נובע ש- } x = \sqrt{8} \text{ או } x = -\sqrt{8}, y = \sqrt{2} \text{ או } y = -\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \quad \text{נפשט:}$$

יש אפוא ארבע אפשרויות:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

נבדוק כל אחת מאפשרויות אלה ביחס למערכת המשוואות המקורית. מהמשוואה

$$xy = 4 \quad \text{נובע של- } x \text{ ול- } y \text{ סימנים זהים. לכן מבין כל האפשרויות, שתי האפשרויות}$$

הבאות מקיימות את המערכת המקורית:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{• אם } b = 8 \text{ אז } a = 2. \text{ מתקבלות המשוואות:}$$

באופן דומה, מתקבלים הפתרונות הבאים:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

לסיכום, למערכת יש ארבעה פתרונות והם:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

השאלה בעמוד 130

תשובה 29

נתונה המשוואה:  $x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1 = 0$

$x = 0$  אינו מקיים את המשוואה. לכן נניח מעתה ש-  $x \neq 0$  ונחלק ב-  $x^2$ :

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \quad \text{ניתן לבטא משוואה זו כך:}$$

$$t = x + \frac{1}{x} \quad \text{כעת נגדיר:}$$

מהגדרה זו נובע (לפי נוסחת הכפל המקוצר  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ):

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2 - 6t - 5 = 0 \quad \text{לכן המשוואה שקולה ל:}$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = 3 \pm 4$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ או } t = 7$$

נבחן כל אחת מהאפשרויות בנפרד:

$$t = -1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = -x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

למשוואה  $x^2 + x + 1 = 0$  יש דיסקרימיננטה שלילית ( $\Delta = 1 - 4 = -3$ ), ולכן אין לה פתרונות. לכן האפשרות  $t = -1$  נפסלת.

$$t = 7 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 7 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 7x \Leftrightarrow x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

קיבלנו שיש בדיוק שני פתרונות למשוואה המקורית:

$$x = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ ו- } x = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

השאלה בעמוד 132

תשובה 30

$$\frac{3x}{4x+2} = 10 \quad \text{א. נתונה המשוואה:}$$

מהמשוואה נובע ש-  $4x + 2 \neq 0$ , כלומר  $x \neq -1/2$ . נניח מעתה ש-  $x$  מקיים תנאי זה.

נכפול ב-  $4x + 2$ :

$$\Leftrightarrow 3x = 10(4x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x = 40x + 20$$

$$\Leftrightarrow 37x = -20$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{20}{37}$$

קיבלנו שלמשוואה יש פתרון אחד ויחיד:  $x = -20/37$ .

$$8x - \frac{2x}{3} = \frac{4x+1}{8} \quad \text{ב. נתונה המשוואה:}$$

$$\frac{4x+1}{8} = \frac{4x}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \quad \text{נפשט את אגף ימין:}$$

$$\Leftrightarrow 8x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \quad \text{לכן המשוואה שקולה למשוואה}$$

$$\Leftrightarrow 8x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8} \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Leftrightarrow \left(8 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{8} \quad \text{נכנס איברים דומים:}$$

$$8 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{48 - 4 - 3}{6} = \frac{41}{6} \quad \text{נחשב:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{41}{6}x = \frac{1}{8} \quad \text{מתקבלת המשוואה}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{41} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{41 \cdot 4} = \frac{3}{164} \quad \text{נחלק ב- } 41/6:$$

קיבלנו שהפתרון היחיד הוא  $x = 3/164$ .

$$x^2 = 5x + 1 \quad \text{ג. נתונה המשוואה:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \quad \text{נפתור כמשוואה ריבועית:}$$

$$.x = (5 - \sqrt{29})/2 \text{ ו- } x = (5 + \sqrt{29})/2 \quad \text{פתרונות המשוואה הם}$$

$$\frac{8x+1}{2x+2} = \frac{1-x}{3-x} \quad \text{ד. נתונה המשוואה:}$$

מהמשוואה נובע ש-  $2x+2 \neq 0$ ,  $3-x \neq 0$ , כלומר  $x \neq -1$ ,  $x \neq 3$ . נניח מעתה ש-  $x$  מקיים תנאי זה. נכפול באלכסון:

$$\Leftrightarrow (8x+1)(3-x) = (2x+2)(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 24x - 8x^2 + 3 - x = 2x - 2x^2 + 2 - 2x \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\Leftrightarrow 23x - 8x^2 + 3 = -2x^2 + 2 \quad \text{נפשט:}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 23x - 1 = 0 \quad \text{נעביר אגפים ונפשט:}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{529 + 24}}{12} = \frac{23 \pm \sqrt{553}}{12} \quad \text{נפתור כמשוואה ריבועית:}$$

$$.x = (23 - \sqrt{553})/12 \text{ ו- } x = (23 + \sqrt{553})/12 \quad \text{פתרונות המשוואה הם}$$

$$(x^2 - x - 1)(x^2 - 2) = 0 \quad \text{ה. נתונה המשוואה:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ או } x^2 - 2 = 0 \quad \text{לפי טענה 3.1:}$$

$$. (1 \pm \sqrt{5})/2 \quad \text{פתרונות המשוואה } x^2 - x - 1 = 0 \text{ הם (כפי שראינו בשאלה 21),}$$

$$. \pm\sqrt{2} \quad \text{פתרונות המשוואה } x^2 - 2 = 0 \text{ (השקולה למשוואה } x^2 = 2 \text{) הם}$$

$$, x = (1 - \sqrt{5})/2, x = \sqrt{2} \text{ ו- } x = (1 + \sqrt{5})/2 \quad \text{לכן פתרונות המשוואה המקורית הם}$$

$$.x = -\sqrt{2} \text{ ו-}$$

ו. נתונה המשוואה:  $x = 5 + \sqrt{x}$

מהמשוואה נובע ש- $x$  אינו מספר שלילי.

נגדיר:  $t = \sqrt{x}$ . גם  $t$  אינו יכול להיות מספר שלילי.

מתקבלת המשוואה:

$$\Leftrightarrow t^2 = 5 + t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

מבין הערכים האפשריים עבור  $t$ ,  $t = (1 - \sqrt{21})/2$  אינו אפשרי כי ערך זה הוא מספר שלילי. הערך  $t = (1 + \sqrt{21})/2$  הוא חיובי, ולכן הוא האפשרות היחידה.

כעת נבטא את  $x$  באמצעות  $t$ :  $x = t^2$ , ולכן,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \left( \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)^2 = \frac{(1 + \sqrt{21})^2}{4} = \frac{1 + 2\sqrt{21} + (\sqrt{21})^2}{4} \\ &= \frac{22 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{11 + \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

לסיכום,  $x = (11 + \sqrt{21})/2$  הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

ז. נתונה המשוואה:  $x = (2x - 1)^2$

נפשט את אגף ימין לפי נוסחת הכפל המקוצר:

$$\Leftrightarrow x = 4x^2 - 4x + 1$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

נפתור כמשוואה ריבועית:

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

פתרונות המשוואה הם  $x = 1$  ו- $x = 1/4$ .

ח. נתונה המשוואה:

$$\frac{1}{3 + \frac{5}{x}} + \frac{x}{3 + \frac{x}{5}} = 2$$

נפשט תחילה כל אחד מהמחזורים.

$$\frac{1}{3 + \frac{5}{x}} = \frac{1}{\left( \frac{3x + 5}{x} \right)} = \frac{x}{3x + 5}$$

$$\frac{x}{3 + \frac{x}{5}} = \frac{x}{\left( \frac{15 + x}{5} \right)} = \frac{5x}{15 + x}$$

במהלך פישוט שני הביטויים ראינו שכדי שאגף שמאל במשוואה המקורית יהיה מוגדר, צריכים להתקיים התנאים הבאים:

(ביחס לביטוי הראשון)  $x \neq 0, 3x + 5 \neq 0$

(ביחס לביטוי השני)  $15 + x \neq 0$

כלומר, צריך להתקיים:  $x \neq 0, x \neq -5/3, x \neq -15$

נניח מעתה שתנאים אלה מתקיימים.

מתקבלת המשוואה:

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3x + 5} + \frac{5x}{15 + x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x(x+15) + 5x(3x+5) = 2(3x+5)(x+15) : (3x+5)(x+15)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 15x + 15x^2 + 25x = 2(3x^2 + 45x + 5x + 75) : \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 40x = 6x^2 + 100x + 150$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 60x - 150 = 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 15 = 0 \quad \text{נחלק ב-10:}$$

נפתור כמשוואה ריבועית:

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 60}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{96}}{2} = 3 \pm \sqrt{24} = 3 \pm 2\sqrt{6}$$

פתרונות המשוואה הם  $x = 3 + 2\sqrt{6}$  ו-  $x = 3 - 2\sqrt{6}$ .

השאלה בעמוד 132

### תשובה 31

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 9x + 12y = -5 \end{cases} \quad \text{א. נתונה המערכת:}$$

$$\Rightarrow 8x - 12y = 8 \quad \text{נכפיל את המשוואה הראשונה ב-4:}$$

$$\Rightarrow 17x = 3 \quad \text{נחבר משוואה זו עם המשוואה השנייה:}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{17} \quad \text{נחלק ב-17:}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{3}{17} - 3y = 2 \quad \text{נציב ערך זה במשוואה הראשונה:}$$

$$\Rightarrow 3y = 2 \cdot \frac{3}{17} - 2 = \frac{6}{17} - \frac{34}{17} = -\frac{28}{17} \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{28}{17 \cdot 3} = -\frac{28}{51} \quad \text{נחלק ב-3:}$$

נוודא שהערכים שקיבלנו  $x = 3/17$ ,  $y = -28/51$  הם אכן פתרון של המערכת המקורית:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \cdot \frac{3}{17} - 3 \cdot \left(-\frac{28}{51}\right) = \frac{18 + 84}{51} = \frac{102}{51} = 2 \\ 9x + 12y = 9 \cdot \frac{3}{17} + 12 \cdot \left(-\frac{28}{51}\right) = \frac{27}{17} - \frac{4 \cdot 28}{17} = \frac{27 - 112}{17} = \frac{-85}{17} = -5 \end{cases}$$

לכן יש למערכת פתרון אחד ויחיד הנתון על ידי הערכים שלעיל.

$$\begin{cases} xy = x + y + 2 \\ 2x = 3y + 4 \end{cases} \quad \text{ב. נתונה המערכת:}$$

נחלק את  $x$  מהמשוואה השנייה:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = x + y + 2 \\ x = \frac{3y + 4}{2} \end{cases}$$

נציב את הביטוי ל- $x$  במשוואה הראשונה:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3y + 4}{2} y = \frac{3y + 4}{2} + y + 2 \\ x = \frac{3y + 4}{2} \end{cases}$$

נפתור את המשוואה הראשונה:

$$\frac{3y+4}{2}y = \frac{3y+4}{2} + y + 2 \Leftrightarrow (3y+4)y = 3y+4+2y+4$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 4y = 5y + 8$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+12 \cdot 8}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{6}$$

לכן המערכת המקורית שקולה ל:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{6} \\ x = \frac{3y+4}{2} \end{cases}$$

אם  $y = (1 + \sqrt{97})/6$  אז

$$\begin{aligned} x &= \frac{3y+4}{2} = \frac{3 \cdot \frac{1+\sqrt{97}}{6} + 4}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{97}}{2} + 4}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{9+\sqrt{97}}{2}\right)}{2} = \frac{9+\sqrt{97}}{4} \end{aligned}$$

ובאופן דומה, אם  $y = (1 - \sqrt{97})/6$  אז  $x = (9 - \sqrt{97})/4$ .

$$\cdot \begin{cases} x = (9 - \sqrt{97})/4 \\ y = (1 - \sqrt{97})/6 \end{cases} \text{ ו- } \begin{cases} x = (9 + \sqrt{97})/4 \\ y = (1 + \sqrt{97})/6 \end{cases} \text{ אפוא, פתרונות המערכת הם, אפוא,}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \\ xy = 10 \end{cases}$$

ג. נתונה המערכת

$$\Rightarrow y = \frac{10}{x}$$

נחלק את  $y$  מהמשוואה השנייה:

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + 2 : \frac{10}{x} = \frac{1}{2}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{2x}{10} = \frac{1}{2}$$

כלומר

$$\Rightarrow 10 + 2x^2 = 5x$$

נכפיל ב- $10x$ :

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 10 = 0$$

למשוואה ריבועית זו יש דיסקרימיננטה שלילית:  $5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = -55$ . לכן למשוואה זו

אין פתרון, ומכאן שגם למערכת המקורית אין פתרון.

$$\begin{cases} xy^2 = 5 + x \\ x + y^2 = 10 \end{cases}$$

ד. נתונה המערכת:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xz = 5 + x \\ x + z = 10 \end{cases}$$

נגדיר:  $z = y^2$ . מתקבלת המערכת

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(10-x) = 5+x \\ z = 10-x \end{cases} \quad \text{נחלק: } z = 10-x \text{ ונציב במשוואה הראשונה:}$$

נפתור את המשוואה הראשונה:

$$x(10-x) = 5+x \Leftrightarrow 10x - x^2 = 5+x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-20}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{2}$$

נבחן כל אחת מהאפשרויות לערך של  $x$ :

$$\text{אם } x = (9 + \sqrt{61})/2 \text{ אז } z = 10 - \frac{9 + \sqrt{61}}{2} = \frac{11 - \sqrt{61}}{2} \approx 1.59$$

מספר זה הוא חיובי, ומהמשוואה  $y^2 = z$  נקבל שתי אפשרויות לערך  $y$ :

$$y = \pm \sqrt{\frac{11 - \sqrt{61}}{2}}$$

$$\text{אם } x = (9 - \sqrt{61})/2 \text{ אז } z = 10 - \frac{9 - \sqrt{61}}{2} = \frac{11 + \sqrt{61}}{2}$$

גם מספר זה הוא חיובי, ומהמשוואה  $y^2 = z$  נקבל שתי אפשרויות לערך  $y$ :

$$y = \pm \sqrt{\frac{11 + \sqrt{61}}{2}}$$

ארבע האפשרויות שקיבלנו הן פתרונות של המערכת המקורית. הפתרונות הם:

$$(1) \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{61}}{2} \\ y = \sqrt{\frac{11 - \sqrt{61}}{2}} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{61}}{2} \\ y = -\sqrt{\frac{11 - \sqrt{61}}{2}} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{61}}{2} \\ y = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{61}}{2}} \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{61}}{2} \\ y = -\sqrt{\frac{11 + \sqrt{61}}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = xy \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

ה. נתונה המערכת:

נבחן בנפרד 3 אפשרויות:

$$(1) \quad x = 0. \text{ במקרה זה המשוואה הראשונה מתקיימת (ללא תלות בערכו של } y),$$

$$\text{ומהמשוואה השנייה נקבל: } 0 + 4y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$$

מתקבל הפתרון  $x = 0, y = 5/4$ .

$$(2) \quad y = 0. \text{ במקרה זה המשוואה הראשונה מתקיימת (ללא תלות בערכו של } x),$$

$$\text{ומהמשוואה השנייה נקבל: } 3x + 0 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

מתקבל הפתרון  $x = 5/3, y = 0$ .

(3)  $x \neq 0$  וגם  $y \neq 0$ . במקרה זה ניתן לחלק את המשוואה הראשונה ב־ $xy$ .



מתקבלת המערכת:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

מערכת זו היא לינארית. נחלץ את  $y$  מהמשוואה הראשונה:  $y = 1 - x$ .

נציב במשוואה השנייה:

$$3x + 4(1 - x) = 5 \Rightarrow 3x + 4 - 4x = 5 \Rightarrow 4 - x = 5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 1 - x = 2$$

קיבלנו את הפתרון  $x = -1, y = 2$ . נוודא שהוא אכן פתרון של המערכת הלינארית:

$$\begin{cases} (-1) + 2 = 1 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 5 \end{cases}$$

הערכים  $x = -1, y = 2$  הם אכן פתרון למערכת הלינארית, ולכן גם למערכת המשוואות המקורית.

מסיכום הפתרונות שהתקבלו בכל המקרים, נקבל כי פתרונות המערכת המקורית הם:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 5/3 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 5/4 \end{cases}$$

השאלה בעמוד 132

### תשובה 32

נסמן:

$x =$  גילו של יוסי (האח הבכור)

$y =$  גילו של אריאל (האח הצעיר)

מנתוני הבעיה נובעות המשוואות הבאות:

(מכפלת הגילים היא 75)

(בעוד שנתיים מכפלת הגילים תהיה 114)

$$xy = 75$$

$$(x + 2)(y + 2) = 114$$

$$\Rightarrow y = \frac{75}{x}$$

$$\Rightarrow (x + 2)\left(\frac{75}{x} + 2\right) = 114$$

$$\Rightarrow (x + 2)(75 + 2x) = 114x$$

$$\Rightarrow 75x + 2x^2 + 150 + 4x = 114x$$

$$\Rightarrow 79x + 2x^2 + 150 - 114x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 35x + 150 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{4} = \frac{35 \pm 5}{4}$$

קיבלנו ש- $x = 7.5$  או  $x = 10$ . לפי המשוואה  $xy = 75$ , אם  $x = 7.5$  אז  $y = 10$ , ואם

$x = 10$  אז  $y = 7.5$ . לכן גילו של אחד האחים הוא 10 וגילו של האח השני 7.5. יוסי הוא

הבכור, לכן יוסי בן 10 ואריאל בן 7.5.

השאלה בעמוד 132

## תשובה 33

נסמן ב- $x$  את גילה של ענת.אסף גדול בשנה מענת, לכן גילו הוא  $x + 1$ .יוחאי גדול בשנתיים מאסף, לכן גילו הוא  $x + 3$ .מכפלת גיליהם של יוחאי, אסף וענת היא  $x(x + 1)(x + 3)$ .בעוד שנתיים, גילה של ענת יהיה  $x + 2$ , גילו של אסף יהיה  $x + 3$ , וגילו של יוחאי יהיה $x + 5$ . מכפלת גיליהם תהיה  $(x + 2)(x + 3)(x + 5)$ .

לפי הנתון בשאלה, מכפלת גיליהם בעוד שנתיים תהיה גדולה ב-40 ממכפלת גיליהם היום.

$$(x + 2)(x + 3)(x + 5) = x(x + 1)(x + 3) + 40 \quad \text{לכן:}$$

נפשט את אגף שמאל:

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3)(x + 5) &= (x^2 + 3x + 2x + 6)(x + 5) \\ &= (x^2 + 5x + 6)(x + 5) \\ &= x^3 + 5x^2 + 5x^2 + 25x + 6x + 30 \\ &= x^3 + 10x^2 + 31x + 30\end{aligned}$$

נפשט את אגף ימין:

$$\begin{aligned}x(x + 1)(x + 3) + 40 &= x(x^2 + 3x + x + 3) + 40 = x(x^2 + 4x + 3) + 40 \\ &= x^3 + 4x^2 + 3x + 40\end{aligned}$$

$$x^3 + 10x^2 + 31x + 30 = x^3 + 4x^2 + 3x + 40 \quad \text{מתקבלת המשוואה:}$$

נעביר אגפים ונכנס איברים דומים (שימו לב שהמחבור  $x^3$  מתבטל):

$$6x^2 + 28x - 10 = 0$$

$$3x^2 + 14x - 5 = 0 \quad \text{נחלק ב-2:}$$

נפתור כמשוואה ריבועית:

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 60}}{6} = \frac{-14 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-14 \pm 16}{6}$$

הערך  $x = (-14 - 16)/6 = -5$  אינו אפשרי כי הוא מספר שלילי.

$$x = \frac{-14 + 16}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{לכן:}$$

לכן ענת בת  $1/3$  של שנה (כלומר ארבעה חודשים), אסף בן שנה וארבעה חודשים, ויוחאי בן שלוש וארבעה חודשים.

השאלה בעמוד 132

## תשובה 34

נסמן ב- $r$  את שיעור הריבית החודשית, כלומר את היחס שבו מוכפל הסכום הקיים בחשבוןלקבלת תשלום הריבית על חודש שלם. אם בחשבון יש  $a$  שקלים, לאחר חודש מתווסףלחשבון תשלום ריבית של  $ra$  שקלים, ובסך הכול יש בחשבון  $a + ra = a(1 + r)$  שקלים.

בחשבון הופקדו 1000 שקלים. בסוף החודש, לאחר הוספת הריבית, היו בו  $1000(1+r)$  שקלים. בשלב זה הופקדו 500 שקלים, והיו בחשבון  $1000(1+r) + 500$  שקלים. לאחר חודש נוסף, יתרת החשבון היתה  $(1000(1+r) + 500)(1+r)$  שקלים.

$$(1000(1+r) + 500)(1+r) = 1600 \quad \text{נתון כי}$$

$$(1000s + 500)s = 1600 \quad \text{נסמן: } s = 1 + r \text{ מתקבלת המשוואה}$$

$$1000s^2 + 500s = 1600 \quad \text{כלומר:}$$

$$10s^2 + 5s - 16 = 0 \quad \text{נחלק ב-100, ונעביר אגפים:}$$

$$s = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 40 \cdot 16}}{20} = \frac{-5 \pm \sqrt{665}}{20} \quad \text{נפתור כמשוואה ריבועית:}$$

הפתרון  $s = (-5 - \sqrt{665})/20$  הוא מספר שלילי, ולכן נפסל (הנחנו מראש ש- $s$  מספר חיובי ואפילו גדול מ-1). לכן:

$$s = \frac{-5 + \sqrt{665}}{20} \approx 1.039$$

$$r = s - 1 \approx 0.039 \quad \text{מכאן (ומהגדרה } s = 1 + r \text{) נקבל:}$$

שיעור הריבית החודשית הוא אפוא 0.039, כלומר 3.9 אחוזים.

השאלה בעמוד 133

### תשובה 35

נסמן את מהירות הנהג בתחילת הדרך ב- $v$  קמ"ש.

נסמן ב- $t_1$  את משך הזמן שלקח לנהג לעבור את מחצית הדרך, כלומר 50 ק"מ.

הוא נסע קטע זה במהירות  $v$  קמ"ש, לכן (לפי הנוסחה  $v = s/t$ , שממנה נובע  $t = s/v$ ),

$$t_1 = \frac{50}{v}$$

נסמן ב- $t_2$  את משך הזמן שלקח לנהג לעבור את המחצית השנייה של הדרך (שגם אורכה

50 ק"מ). הוא נסע קטע זה במהירות  $v + 10$  קמ"ש, לכן

$$t_2 = \frac{50}{v + 10}$$

הנסיעה כולה ארכה 55 דקות, שהן  $55/60$  של שעה, כלומר  $11/12$  של שעה.

לכן  $t_1 + t_2 = 11/12$ , כלומר:

$$\frac{50}{v} + \frac{50}{v + 10} = \frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 50(v + 10) + 12 \cdot 50v = 11v(v + 10) \quad \text{נכפיל ב- } 12v(v + 10):$$

$$\Rightarrow 600v + 6000 + 600v = 11v^2 + 110v$$

$$\Rightarrow 11v^2 - 1090v - 6000 = 0$$

$$\Rightarrow v = \frac{1090 \pm \sqrt{1090^2 + 44 \cdot 6000}}{22}$$

אם נבחר את סימן המינוס בפתרון, תתקבל תוצאה שלילית (כי הביטוי  $\sqrt{1090^2 + 44 \cdot 6000}$  גדול מ-1090), בסתירה לנתוני הבעיה. לכן יש לבחור את הסימן +, ומתקבל:

$$v = \frac{1090 + \sqrt{1090^2 + 44 \cdot 6000}}{22} \approx 104.3$$

לכן מהירות הנהג בחלק הראשון של הדרך היתה 104.3 קמ"ש, ובחלק השני 114.3 קמ"ש.

השאלה בעמוד 133

### תשובה 36

נסמן ב- $x$  את משך חייו של דיوفנטוס (בשנים).

לפי החידה, ניתן לחלק את חייו לפרקי הזמן הבאים:

רק שישית מחייו נמשכה ילדותו.

ילדותו של דיופנטוס נמשכה  $x/6$  שנים.

עוד חייו חלקי שתיים-עשרה – צץ לו זקן;

לאחר  $x/12$  שנים צץ לו זקן.

עוד שביעית מחייו – והנה הוא חתן.

לאחר  $x/7$  שנים התחתן.

עוד חמש שנות חיים – ונולד לו הבן;

לאחר 5 שנים נולד בנו.

חי פי שנים פחות מאביו, המסכן!

בנו חי  $x/2$  שנים.

הזדקן החכם בארבע שנות השכול

אחרי מות הבן – וירד אל השאול

דיופנטוס חי עוד 4 שנים אחרי מות בנו.

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \quad \text{מתקבלת המשוואה:}$$

$$\Rightarrow x \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \right) + 9 = x$$

נחבר את השברים (המכנה המשותף הוא  $12 \cdot 7 = 84$ ):

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{14 + 7 + 12 + 42}{84} = \frac{75}{84}$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{75}{84} + 9 = x \Rightarrow x \left( 1 - \frac{75}{84} \right) = 9 \Rightarrow x \cdot \frac{9}{84} = 9 \Rightarrow x = 84$$

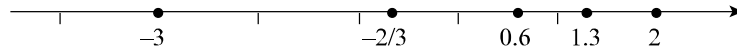
משך שנות חייו של דיופנטוס היה 84 שנים.

## פתרונות לשאלות בשיעור 4

השאלה בעמוד 135

### תשובה 1

נציג על ציר המספרים:



בין המספרים מתקיימים יחסי הסדר הבאים:

$$-3 < -\frac{2}{3} < 0.6 < 1.3 < 2$$

השאלה בעמוד 136

### תשובה 2

- א.  $2 < 2$ : לא נכון  
 ב.  $3 < 5$ : נכון  
 ג.  $2 \leq 2$ : נכון  
 ד.  $2 \leq 3$ : נכון  
 ה.  $-3 < 2$ : נכון  
 ו.  $1/2 < 1/3$ : לא נכון

השאלה בעמוד 138

### תשובה 3

- א. הטענה  $2 \in \mathbb{N}$  נכונה, כי 2 הוא מספר טבעי.  
 ב. הטענה  $8/3 \in \mathbb{Z}$  אינה נכונה, כי  $8/3$  אינו מספר שלם.  
 ג. הטענה  $-27/9 \in \mathbb{Z}$  נכונה, כי  $-27/9 = -3$  ולכן הוא מספר שלם.  
 ד. הטענה  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  נכונה: המספר  $\sqrt{2}$  אינו רציונלי (כפי שלמדנו בשיעור 1) ולכן אינו שייך ל- $\mathbb{Q}$ , קבוצת המספרים הרציונליים.  
 ה. הטענה  $1 \in \{2, 3\}$  אינה נכונה: 1 אינו שייך לקבוצה שאיבריה הם 2 ו-3.

השאלה בעמוד 138

### תשובה 4

- א. קבוצת המספרים השלמים שאינם שליליים:  
 $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$   
 (ניתן לכתוב גם כך:  $\{n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ ).  
 ב. קבוצת המספרים הממשיים החיוביים:  
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$   
 ג. קבוצת המספרים הממשיים שבין 1 ל-5 (כולל הקצוות):  
 $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$   
 ד. קבוצת המספרים הזוגיים:  
 $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

השאלה בעמוד 140

## תשובה 5

א. לפי ההגדרה:  $[0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$ הטענה  $1 \in [0, 2]$  נכונה, כי  $0 \leq 1 \leq 2$ .ב. לפי ההגדרה:  $(1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ הטענה  $2 \in (1, 2)$  אינה נכונה, כי לא מתקיים  $2 < 2$ .ג. לפי ההגדרה:  $(-1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ הטענה  $1 \in (-1, \infty)$  נכונה, כי  $1 > -1$ .ד. לפי ההגדרה:  $(3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$ הטענה  $5 \in (3, 5]$  נכונה, כי  $3 < 5 \leq 5$ .ה. לפי ההגדרה:  $(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ הטענה  $4 \in (-\infty, 3)$  אינה נכונה, כי לא מתקיים  $4 < 3$ .

השאלה בעמוד 140

## תשובה 6

א. קבוצת המספרים החיוביים:  $(0, \infty)$ ב. קבוצת המספרים האי־שליליים:  $[0, \infty)$ ג. קבוצת המספרים השליליים:  $(-\infty, 0)$ 

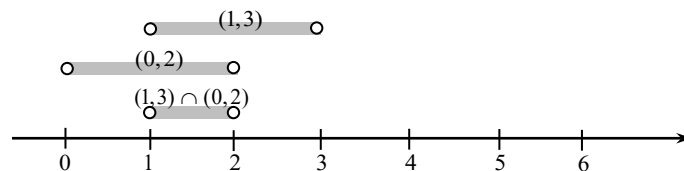
השאלה בעמוד 142

## תשובה 7

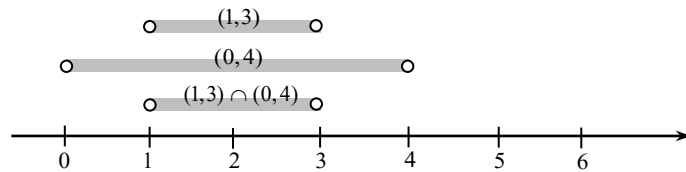
נתונות הקבוצות:  $A = \left\{4, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ איחוד הקבוצות הוא:  $A \cup B = \left\{4, \frac{1}{2}, 1, 3, 5, 6\right\}$ חיתוך הקבוצות הוא:  $A \cap B = \{3, 4\}$ ההפרש  $A \setminus B$  הוא:  $A \setminus B = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ 

השאלה בעמוד 142

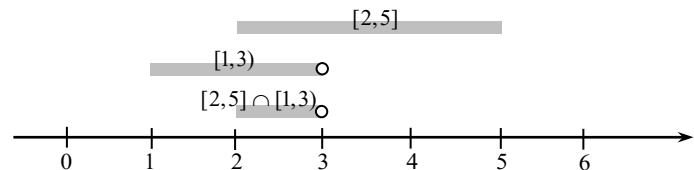
## תשובה 8

א.  $(1, 3) \cap (0, 2) = (1, 2)$ , כמודגם בתרשים הבא:

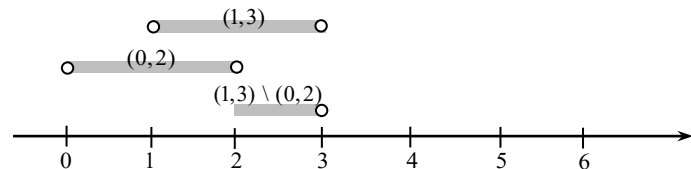
ב.  $(1,3) \cap (0,4) = (1,3)$  , כמודגם בתרשים:



ג.  $[2,5] \cap [1,3] = [2,3]$  , כמודגם בתרשים:

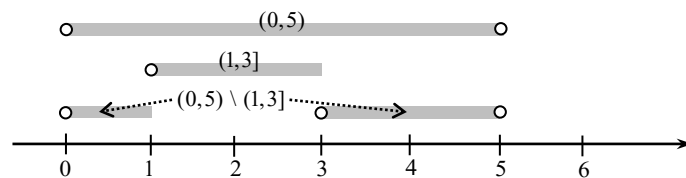


ד.  $(1,3) \setminus (0,2) = [2,3]$  , כמודגם בתרשים:



◁ שימו לב כי הנקודה 2 שייכת לקבוצה  $(1,3)$  ולא שייכת לקבוצה  $(0,2)$ . לכן היא שייכת להפרש  $(1,3) \setminus (0,2)$ .

ה.  $(0,5) \setminus (1,3] = (0,1] \cup (3,5)$  , כמודגם בתרשים:



## תשובה 9

א. טענה: אם  $a \geq b$  אז  $a + c \geq b + c$ .

הוכחה:

נתון ש- $a \geq b$ . לכן  $a > b$  או  $a = b$ . נבחן כל אפשרות בנפרד:

אם  $a > b$  אז (לפי תכונה 3) נוסיף  $c$  לשני האגפים ונקבל:  $a + c > b + c$ .  
לכן  $a + c \geq b + c$ .

אם  $a = b$  אז (לפי כללי ההיסק של השוויון) נוסיף  $c$  לשני האגפים ונקבל:  
 $a + c = b + c$ . לכן  $a + c \geq b + c$ .

קיבלנו שבכל המקרים מתקיים  $a + c \geq b + c$ , כנדרש.  $\square$

השאלה בעמוד 143

ב. טענה: אם  $a \geq b$  ו- $b > c$  אז  $a > c$ .

הוכחה:

נתון ש- $a \geq b$ . לכן  $a > b$  או  $a = b$ . נבחן כל אפשרות בנפרד:

אם  $a > b$  אז לפי תכונת הטרנזיטיביות, מכיוון שגם  $b > c$ , נובע ש- $a > c$ .

אם  $a = b$  אז מכך ש- $b > c$  נובע ש- $a > c$ .

קיבלנו שבכל המקרים מתקיים  $a > c$ , כנדרש.  $\square$

ג. טענה: אם  $a \geq b$  ו- $b \geq c$  אז  $a \geq c$ .

הוכחה:

נתון ש- $b \geq c$ . לכן  $b > c$  או  $b = c$ . נבחן כל אפשרות בנפרד:

אם  $b > c$  אז לפי סעיף ב בשאלה זו, מכיוון שגם  $a \geq b$ , נובע ש- $a > c$ , ולכן  $a \geq c$ .

אם  $b = c$  אז מכך ש- $a \geq b$  נובע ש- $a \geq c$ .

קיבלנו שבכל המקרים מתקיים  $a \geq c$ , כנדרש.  $\square$

ד. טענה: אם  $a \geq b$  ו- $c \geq 0$  אז  $ac \geq bc$ .

הוכחה:

אם  $a = b$  או  $c = 0$  אז  $ac = bc$ , ובפרט,  $ac \geq bc$ .

אחרת, מתקיים  $a > b$  וגם  $c > 0$ . לכן (לפי תכונת הכפלת אי־שוויון בקבוע חיובי),

$ac > bc$ . בפרט,  $ac \geq bc$ .  $\square$

השאלה בעמוד 148

## תשובה 10

א. טענה: אם  $a \geq b$  וגם  $c \geq d$  אז  $a + c \geq b + d$ .

הוכחה: לפי סעיף א בשאלה 9, מתקיים  $a + c \geq a + d$ , וגם  $a + d \geq b + d$ . לכן (לפי

סעיף ג בשאלה 9),  $a + c \geq b + d$ .  $\square$

ב. טענה: אם  $a \geq b$  וגם  $c > d$  אז  $a + c > b + d$ .

הוכחה: נתבונן בנפרד במקרים הבאים –

**מקרה 1:**  $a > b$ . במקרה זה נחבר את האי־שוויונות  $a > b$ ,  $c > d$  ונקבל:

$$a + c > b + d$$

**מקרה 2:**  $a = b$ . במקרה זה נוסיף את  $a$  לשני אגפי האי־שוויון  $c > d$ , ונקבל

$$a + c > a + d, \text{ כלומר } a + c > b + d$$

הוכחנו שבכל המקרים,  $a + c > b + d$ .  $\square$

ג. טענה: אם  $a \geq 0$  וגם  $b \geq 0$  אז  $ab \geq 0$ .

הוכחה:

לפי סעיף ד בשאלה 9, ניתן להכפיל את שני אגפי האי־שוויון החלש  $a \geq 0$  ב- $b$ , ולקבל:

$ab \geq 0 \cdot b$ . לכן  $ab \geq 0$ .  $\square$



ד. טענה: אם  $a \geq b \geq 0$  וגם  $c \geq d \geq 0$  אז  $ac \geq bd$ .

הוכחה:

לפי סעיף ד בשאלה 9,  $ac \geq ad$  וגם  $ad \geq bd$ . לכן (לפי סעיף ג בשאלה 9),  $ac \geq bd$ . ☐

ה. טענה: אם  $a \geq b$  אז  $-a \leq -b$ .

הוכחה:

נתבונן בנפרד במקרים הבאים –

**מקרה 1:**  $a > b$ . במקרה זה, מתכונת היפוך כיוון האי־שוויון נובע ש־ $-a < -b$ .

בפרט,  $-a \leq -b$ .

**מקרה 2:**  $a = b$ . במקרה זה מתקיים  $-a = -b$ , ובפרט  $-a \leq -b$ .

הוכחנו שבכל המקרים,  $-a \leq -b$ . ☐

השאלה בעמוד 148

## תשובה 11

א. טענה: אם  $b > 0$  אז  $a + b > a$ .

הוכחה: נסיף  $a$  לשני אגפי האי־שוויון  $b > 0$ , ונקבל:  $a + b > a + 0$ , כלומר

$a + b > a$ . ☐

ב. טענה: אם  $b \geq 0$  אז  $a + b \geq a$ .

הוכחה: נסיף  $a$  לשני אגפי האי־שוויון  $b \geq 0$ , ונקבל (לפי סעיף א בשאלה 9):

$a + b \geq a + 0$ , כלומר  $a + b \geq a$ . ☐

ג. טענה: אם  $b < 0$  אז  $a + b < a$ .

הוכחה: כמו בסעיף א, נסיף את  $a$  לשני אגפי האי־שוויון  $b < 0$ , ונקבל:  $a + b < a$ .

☐

ד. טענה: אם  $b \leq 0$  אז  $a + b \leq a$ .

הוכחה: כמו בסעיף ב, נסיף את  $a$  לשני אגפי האי־שוויון  $b \leq 0$ , ונקבל:  $a + b \leq a$ .

☐

ה. טענה: אם  $a > 0$  ו־ $b > 1$  אז  $ab > a$ .

הוכחה:

נכפיל את שני אגפי האי־שוויון החיובי  $b > 1$  במספר החיובי  $a$ , ונקבל:  $ab > a$ . ☐

ו. טענה: אם  $a > 0$  ו־ $b < 1$  אז  $ab < a$ .

הוכחה:

נתבונן בנפרד במקרים הבאים –

**מקרה 1:**  $b > 0$ . במקרה זה, נכפיל את שני אגפי האי־שוויון החיובי  $b < 1$  במספר

החיובי  $a$ , ונקבל:  $ab < a$ .

**מקרה 2:**  $b = 0$ . במקרה זה,  $ab = 0$ , לכן  $ab < a$ .

**מקרה 3:**  $b < 0$ . במקרה זה, לפי חוקי הסימנים,  $ab < 0$ . נתון גם ש- $a < 0$ ,

לכן מהטרנזיטיביות נובע  $ab < a$ .

□

הוכחנו שבכל המקרים,  $ab < a$ .

ז. **טענה:** סכום של מספרים חיוביים הוא חיובי, וסכום של מספרים שליליים הוא שלילי.

**הוכחה:**

אם  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים אז  $a > 0$  ו- $b > 0$ . נחבר את שני האי-שוויונות ונקבל  $a + b > 0$ , כלומר  $a + b$  חיובי.

אם  $a$  ו- $b$  מספרים שליליים אז  $a < 0$  ו- $b < 0$ . נחבר את שני האי-שוויונות ונקבל  $a + b < 0$ , כלומר  $a + b$  שלילי.

□

השאלה בעמוד 149

## תשובה 12

א. **טענה:** לכל  $a, b$  ממשיים מתקיים  $a^2 + b^2 \geq 0$ .

**הוכחה:** לפי תכונת אי-שליליות הריבוע, מתקיים  $a^2 \geq 0$  וגם  $b^2 \geq 0$ . נחבר את שני האי-שוויונות ונקבל:  $a^2 + b^2 \geq 0$ .

□

**טענה:**  $a^2 + b^2 = 0$  אם ורק אם  $a = 0$  וגם  $b = 0$ .

**הוכחה:** אם  $a = 0$  ו- $b = 0$  אז  $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ .

בכיוון ההפוך, אם  $a^2 + b^2 = 0$  אז מכיוון ש- $b^2 \geq 0$ , מתקיים  $a^2 \leq a^2 + b^2$  כלומר  $a^2 \leq 0$ , אך זה ייתכן רק כאשר  $a = 0$  (ראינו שכאשר  $a \neq 0$  אז  $a^2 > 0$ ). לכן  $a = 0$ , ובאותו אופן, גם  $b = 0$ .

□

ב. **טענה:** לכל  $a$  חיובי מתקיים  $a + 1/a \geq 2$ .

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

**הוכחה:** לפי תכונת אי-שליליות הריבוע, מתקיים:

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

נפתח סוגריים לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$\Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

נוסיף  $2a$  לשני האגפים:

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

נחלק את שני האגפים במספר החיובי  $a$ :

□

הוכחנו את האי-שוויון המבוקש.

כעת נבדוק מתי מתקיים שוויון  $a + 1/a = 2$ : אם  $a = 1$  אז אכן

$$a + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$a + \frac{1}{a} = 2$$

בכיוון ההפוך, נניח שמתקיים

$$\Rightarrow a^2 + 1 = 2a$$

נכפיל ב- $a$  ונקבל:

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

נעביר אגפים:

$$\Rightarrow (a - 1)^2 = 0$$

לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

לכן  $a - 1 = 0$ , כלומר  $a = 1$ .

לסיכום, שוויון מתקיים אם ורק אם  $a = 1$ .

### תשובה 13

א. נתון ש-  $3 < x < 4$  ו-  $10 < y < 20$ . ננסה להעריך את הביטוי  $x/(xy + 1)$ .

נציג שתי דרכים להערכת הביטוי. בדרך הראשונה, נעריך את המכנה:

מהכפלת האי-שוויונות החיוביים  $x < 4$ ,  $y < 20$ , נקבל  $xy < 80$

מהכפלת האי-שוויונות החיוביים  $x > 3$ ,  $y > 10$ , נקבל  $xy > 30$

ביחד נקבל  $30 < xy < 80$ , ומכאן  $31 < xy + 1 < 81$

לכן (ביצוע "1 חלקי" לאי-שוויונות חיוביים),  $\frac{1}{81} < \frac{1}{xy + 1} < \frac{1}{31}$

כמו כן נתון  $3 < x < 4$

מהכפלת האי-שוויונות החיוביים המתאימים, נקבל  $\frac{3}{81} < \frac{x}{xy + 1} < \frac{4}{31}$

כלומר  $\frac{1}{27} < \frac{x}{xy + 1} < \frac{4}{31}$

נתבונן בפיתוח העשרוני:  $\frac{1}{27} \approx 0.037037$ ,  $\frac{4}{31} \approx 0.12903$

לפיכך  $0.037 < \frac{x}{xy + 1} < 0.13$

כעת נעריך את הביטוי בדרך שונה. נסמן:  $a = \frac{x}{xy + 1}$

נתבונן בביטוי  $1/a$  וננסה להעריך אותו:  $\frac{1}{a} = \frac{xy + 1}{x} = y + \frac{1}{x}$

מהנתון  $3 < x < 4$  נקבל  $\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$

כזכור, נתון:  $10 < y < 20$

נחבר ונקבל  $10 + \frac{1}{4} < y + \frac{1}{x} < 20 + \frac{1}{3}$

כלומר:  $\frac{41}{4} < \frac{1}{a} < \frac{61}{3}$

לכן (ביצוע "1 חלקי" לאי-שוויונות חיוביים),  $\frac{3}{61} < a < \frac{4}{41}$

נתבונן בפיתוח העשרוני:  $\frac{3}{61} \approx 0.04918$ ,  $\frac{4}{41} \approx 0.09756$

לפיכך:  $0.049 < \frac{x}{xy + 1} < 0.098$

בדרך השנייה קיבלנו הערכה מדויקת יותר.

ב. נתון ש-  $3 \leq x < 4$  ו-  $y \geq 2$ . נעריך את הביטוי:  $\frac{x}{2 + \frac{1}{y}}$

מהנתון  $y \geq 2$  נקבל:  $1/y \leq 1/2$ . כמו כן,  $y$  מספר חיובי ( $y \geq 2 > 0$  גורר  $y > 0$ ) ולכן (לפי כללי הסימני בחילוק)  $1/y$  חיובי. קיבלנו אפוא:

$0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

לכן:  $2 < 2 + \frac{1}{y} \leq 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

נבצע "1 חלקי" לאי־שוויונות אלה:

$$\frac{2}{5} \leq \frac{1}{2 + \frac{1}{y}} < \frac{1}{2}$$

נזכור כי נתון:

$$3 \leq x < 4$$

נכפיל את האי־שוויונות החיוביים:

$$1.2 = \frac{6}{5} \leq \frac{x}{2 + \frac{1}{y}} < 2$$

ג. נניח ש-  $x \in (2, 2.25)$ , ונמצא הערכה לביטוי  $\sqrt{x} - x^2$ .

מתקיים:

$$2 < x < 2.25 = 1.5^2$$

(1) לכן (הוצאת שורש מאי־שוויון חיובי):

$$\sqrt{2} < \sqrt{x} < 1.5$$

וגם (העלאת אי־שוויון חיובי בריבוע)

$$4 < x^2 < 2.25^2 = 5.0625$$

(2) מתכונת היפוך האי־שוויון נובע:

$$-5.0625 < -x^2 < -4$$

נחבר את האי־שוויונות (1) ו-(2):

$$\sqrt{2} - 5.0625 < \sqrt{x} - x^2 < -2.5$$

נמצא את הפיתוח העשרוני של האגף השמאלי:

$$\sqrt{2} - 5.0625 \approx -3.6482$$

לכן:

$$-3.65 < \sqrt{x} - x^2 < -2.5$$

ד. נניח ש-  $x \in [2, 3)$ , ונמצא הערכה לביטוי:

$$\frac{1}{2 + \frac{3}{x}}$$

מהנתון נובע

$$2 \leq x < 3$$

לכן (ביצוע "1 חלקי" לאי־שוויונות חיוביים):

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

נכפיל ב-3:

$$1 < \frac{3}{x} \leq \frac{3}{2}$$

נוסיף 2:

$$3 < 2 + \frac{3}{x} \leq \frac{7}{2}$$

נבצע שוב "1 חלקי":

$$0.285 \approx \frac{2}{7} \leq \frac{1}{2 + \frac{3}{x}} < \frac{1}{3} \approx 0.333$$

ונקבל הערכה עשרונית:

$$0.28 < \frac{1}{2 + \frac{3}{x}} < 0.34$$

השאלה בעמוד 153

#### תשובה 14

בכל הטענות נניח כי  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים.

טענה 1:

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

**הוכחה:** אם  $a > b$  אז ניתן (מכיוון שהמספרים חיוביים) לבצע "1 חלקי" לאי־שוויון זה ולקבל  $1/a < 1/b$ .

בכיוון ההפוך, נניח ש- $1/a < 1/b$ . לפי חוקי הסימנים בחילוק, המספרים  $1/a$  ו- $1/b$  חיוביים. נבצע "1 חלקי" לאי-שוויון שהנחנו, ונקבל:

$$1 : \frac{1}{a} > 1 : \frac{1}{b}$$

כלומר:

$$a > b$$

הוכחנו אפוא ש- $a > b$  אם רק אם  $1/a < 1/b$ . □

**טענה 2:**  $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

**הוכחה:** נניח ש- $a > b$ . מכיוון שהמספרים חיוביים, ניתן להעלות את האי-שוויון בריבוע. נקבל:  $a^2 > b^2$ .

בכיוון ההפוך, נניח ש- $a^2 > b^2$ . נוכיח ש- $a > b$ , בדרך השלילה: אם לא מתקיים  $a > b$  אז  $a \leq b$ . נעלה בריבוע (אי-שוויון חיובי) ונקבל  $a^2 \leq b^2$ , בסתירה להנחה ש- $a^2 > b^2$ . לכן בהכרח מתקיים  $a > b$ . □

**טענה 3:**  $a > b \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

**הוכחה:** אם  $a > b$ , נוציא שורש מהאי-שוויון החיובי, ונקבל:  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ .  
בכיוון ההפוך, נניח ש- $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ . המספרים  $\sqrt{a}$  ו- $\sqrt{b}$  חיוביים, לכן ניתן להעלות בריבוע. נקבל:  $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$ . מהגדרת השורש נובע ש- $(\sqrt{a})^2 = a$  ו- $(\sqrt{b})^2 = b$ , לכן  $a > b$ . □

השאלה בעמוד 153

## תשובה 15

יהי  $a$  מספר חיובי. נוכיח שמתקיים:

$$\frac{a+1}{a+2} < \frac{a+3}{a+4}$$

המונים והמכנים  $a+1, a+2, a+3, a+4$  כולם מספרים חיוביים (כסכומים של מספרים חיוביים). לכן ניתן לכפול באלכסון ולקבל אי-שוויון שקול:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (a+1)(a+4) &< (a+2)(a+3) \\ \Leftrightarrow a^2 + 5a + 4 &< a^2 + 5a + 6 && \text{נפתח סוגריים בשני האגפים:} \\ \Leftrightarrow 4 &< 6 && \text{נחסר } a^2 + 5a \text{ משני האגפים:} \end{aligned}$$

קיבלנו שהאי-שוויון המקורי שקול לאי-שוויון שמתקיים תמיד,  $4 < 6$ . לכן האי-שוויון המקורי מתקיים.

השאלה בעמוד 153

## תשובה 16

א. בשברים  $5/9$  ו- $7/13$  המונים והמכנים חיוביים. לכן יש שקילות המתקבלת מכפל באלכסון:

$$\frac{5}{9} > \frac{7}{13} \Leftrightarrow 5 \cdot 13 > 9 \cdot 7$$

נשווה בין המכפלות באלכסון:

$$5 \cdot 13 = 65, \quad 9 \cdot 7 = 63$$

$$5 \cdot 13 > 9 \cdot 7$$

נחלק ב- $9 \cdot 13$ :

$$\frac{5}{9} > \frac{7}{13}$$

ב. המספר  $19/51$  חיובי והמספר  $-1/3$  שלילי:  
 $\frac{19}{51} > 0 > -\frac{1}{3}$   
 לכן  $19/51$  יותר גדול מ- $-1/3$ .

ג. לפי תכונות היפוך האי־שוויון, והכפל באלכסון:  
 $-\frac{8}{11} > -\frac{12}{17} \Leftrightarrow \frac{8}{11} < \frac{12}{17} \Leftrightarrow 8 \cdot 17 < 11 \cdot 12$

נחשב את המכפלות באלכסון:  
 $8 \cdot 17 = 136, 11 \cdot 12 = 132$   
 $8 \cdot 17 > 11 \cdot 12$   
 לכן מתקיים:

נחלק ב- $11 \cdot 17$ :  
 $\frac{8}{11} > \frac{12}{17}$

לפי תכונת היפוך האי־שוויון:  
 $-\frac{8}{11} < -\frac{12}{17}$

השאלה בעמוד 154

**תשובה 17**

א. נפתור את האי־שוויון:

נוסיף 1 לשני האגפים:

נחלק את שני האגפים ב- $15$ :

קבוצת הפתרונות היא  $\{x \mid x > 1/3\}$ , כלומר הקטע  $(1/3, \infty)$ .

ב. נפתור את האי־שוויון:

נוסיף  $2x$  לשני האגפים:

נפחית 1 משני האגפים:

נחלק ב- $8$ , ונחליף את סדר האגפים:

קבוצת הפתרונות היא  $\{x \mid x \geq 1/4\}$ , כלומר הקטע  $[1/4, \infty)$ .

ג. נפתור את האי־שוויון:

נכפיל ב- $5$ :

נפחית  $x$  משני האגפים, ונחליף את סדר האגפים:

נחלק ב- $9$ :

קבוצת הפתרונות היא  $\{x \mid x \geq 1/9\}$ , כלומר הקטע  $[1/9, \infty)$ .

ד. נפתור את האי־שוויון:

נכפיל ב- $2$ :

נפחית  $8x$  משני האגפים:

הגענו לאי־שוויון שקול שאינו מתקיים אף פעם, לכן אין לאי־שוויון המקורי פתרונות.  
 במילים אחרות, קבוצת הפתרונות היא  $\emptyset$  (הקבוצה הריקה).

ה. נפתור את האי־שוויון:  $-3x > -2$

לפי כלל היפוך האי־שוויון:  $\Leftrightarrow 3x < 2$

נחלק ב־3:  $\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$

קבוצת הפתרונות היא  $\{x \mid x < 2/3\}$ , כלומר הקטע  $(-\infty, 2/3)$ .

השאלה בעמוד 156

## תשובה 18

א. נתון האי־שוויון:  $\frac{x}{x-2} > 8$

נתבונן במקרים הבאים:

**מקרה ראשון:**  $x > 2$

במקרה זה  $x - 2$  חיובי. נכפול בו, ונקבל אי־שוויון שקול:  $\Leftrightarrow x > 8(x - 2)$

נפתח סוגריים:  $\Leftrightarrow x > 8x - 16$

נעביר אגפים:  $\Leftrightarrow 16 > 7x$

נחלק ב־7:  $\Leftrightarrow x < \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$

קבוצת הפתרונות במקרה זה היא  $\{x \mid 2 < x < 2\frac{2}{7}\}$

**מקרה שני:**  $x = 2$

במקרה זה האגף השמאלי אינו מוגדר (בגלל חלוקה באפס), ולכן אין פתרון.

**מקרה שלישי:**  $x < 2$

במקרה זה  $x - 2$  שלילי. נכפול בו, ונהפוך את כיוון האי־שוויון:

$\Leftrightarrow x < 8(x - 2)$

נפתור בדומה למקרה הראשון:

$\Leftrightarrow x < 8x - 16 \Leftrightarrow 16 < 7x \Leftrightarrow x > \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$

שני התנאים  $x > 2\frac{2}{7}$  ו־ $x < 2$  לא יכולים להתקיים בו־זמנית, לכן במקרה זה אין פתרון.

לסיכום, קבוצת הפתרונות של האי־שוויון היא  $\{x \mid 2 < x < 2\frac{2}{7}\}$

ב. נפתור את האי־שוויון:  $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{3-x}$

אם  $x = 1$  או  $x = 3$ , אחד האגפים אינו מוגדר, ולכן אלה אינם פתרונות. נניח מעתה  $x \neq 1$  ו־ $x \neq 3$ , ונתבונן בנקודות 1 ו־3 על ציר המספרים:



בהתאם, נתבונן בנפרד במקרים הבאים:  $x < 1$ ,  $1 < x < 3$ ,  $x > 3$ .

**מקרה ראשון:**  $x < 1$

במקרה זה מתקיים  $x - 1 < 0$  ו-  $3 - x > 0$  (כי  $x < 3$ , לכן  $x - 3 < 0$  ולכן  $3 - x > 0$ ).  
לכן הביטוי  $(x - 1)(3 - x)$  שלילי. נכפול בביטוי זה (בהיפוך כיוון האי־שוויון):

$$\Leftrightarrow 3 - x < 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3 - x < 2x - 2 \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\Leftrightarrow 3x > 5 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \quad \text{נחלק ב-3:}$$

התנאים  $x < 1$  ו-  $x > 1\frac{2}{3}$  לא יכולים להתקיים בו־זמנית. לכן במקרה זה אין פתרון.

**מקרה שני:**  $1 < x < 3$ .

במקרה זה מתקיים  $x - 1 > 0$  ו-  $3 - x > 0$  (כי עדיין  $x < 3$ , לכן הנימוק מהמקרה הראשון תקף). לכן הביטוי  $(x - 1)(3 - x)$  חיובי. נכפול בו ונקבל אי־שוויון שקול:

$$\Leftrightarrow 3 - x > 2(x - 1)$$

פתרון אי־שוויון זה דומה למקרה הקודם: יש רק להפוך את כיווני האי־שוויון. נקבל:

$$\Leftrightarrow x < \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

לכן קבוצת הפתרונות במקרה זה היא  $\{x \mid 1 < x < 1\frac{2}{3}\}$

**מקרה שלישי:**  $x > 3$ .

במקרה זה מתקיים  $x - 1 > 2 > 0$  ו-  $3 - x < 0$  (כי  $x - 3 > 0$ ). לכן הביטוי  $(x - 1)(3 - x)$  שלילי. נכפול בביטוי זה (בהיפוך כיוון האי־שוויון):

$$\Leftrightarrow 3 - x < 2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x > 1\frac{2}{3} \quad \text{קיבלנו אי־שוויון זהה למה שקיבלנו במקרה ראשון, לכן:}$$

תנאי זה מתקיים לכל  $x > 3$ , לכן במקרה זה האי־שוויון מתקיים תמיד.

לסיכום, קבוצת הפתרונות של האי־שוויון היא:

$$\{x \mid 1 < x < 1\frac{2}{3} \text{ או } x > 3\}$$

$$(1, 1\frac{2}{3}) \cup (3, \infty) \quad \text{ניתן להציג קבוצה זו כאיחוד של קטעים:}$$

## תשובה 19

$$(x - 2)(x + 6) < 0 \quad \text{א. נפתור:}$$

הביטוי  $x - 2$  מתאפס עבור  $x = 2$ , חיובי עבור  $x > 2$  ושליילי עבור  $x < 2$ .

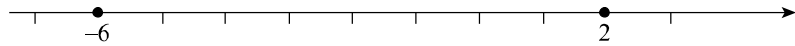
הביטוי  $x + 6$  מתאפס עבור  $x = -6$ , חיובי עבור  $x > -6$  ושליילי עבור  $x < -6$ .

עבור הערכים  $x = 2$  ו-  $x = -6$  המכפלה  $(x - 2)(x + 6)$  מתאפסת, ולכן האי־שוויון

לא מתקיים. נניח מעתה ש-  $x \neq 2$  ו-  $x \neq -6$ .



נתבונן בנקודות על פני ציר המספרים:



בהתאם, נתבונן במקרים הבאים:

| המקרה        | הביטוי  | הביטוי  | המכפלה           |
|--------------|---------|---------|------------------|
|              | $x - 2$ | $x + 6$ | $(x - 2)(x + 6)$ |
| $x < -6$     | -       | -       | +                |
| $-6 < x < 2$ | -       | +       | -                |
| $x > 2$      | +       | +       | +                |

לכן האי-שוויון המקורי מתקיים אם ורק אם  $-6 < x < 2$ . קבוצת הפתרונות היא  $(-6, 2)$ .

ב. נפתור: 
$$\frac{(x-1)(2x-3)}{x+1} \geq 0$$

הביטוי  $x - 1$  מתאפס עבור  $x = 1$ , חיובי עבור  $x > 1$  ושלילי עבור  $x < 1$ .

הביטוי  $x + 1$  מתאפס עבור  $x = -1$ , חיובי עבור  $x > -1$  ושלילי עבור  $x < -1$ .

הביטוי  $2x - 3$  מתאפס עבור  $x = 3/2 = 1\frac{1}{2}$ , חיובי עבור  $x > 1\frac{1}{2}$  ושלילי עבור  $x < 1\frac{1}{2}$ .

אם  $x = 1$  או  $x = 1\frac{1}{2}$ , האגף השמאלי מתאפס ולכן האי-שוויון מתקיים.

אם  $x = -1$ , האגף השמאלי לא מוגדר (המכנה מתאפס) ולכן האי-שוויון לא מתקיים.

נניח כעת ש-  $x \neq -1, 1, 1\frac{1}{2}$  ונתבונן במקרים הבאים:

| המקרה                  | הביטוי  | הביטוי  | המכפלה   | המנה                      |
|------------------------|---------|---------|----------|---------------------------|
|                        | $x + 1$ | $x - 1$ | $2x - 3$ | $\frac{(x-1)(2x-3)}{x+1}$ |
| $x < -1$               | -       | -       | -        | +                         |
| $-1 < x < 1$           | +       | -       | -        | +                         |
| $1 < x < 1\frac{1}{2}$ | +       | +       | -        | -                         |
| $x > 1\frac{1}{2}$     | +       | +       | +        | +                         |

האי-שוויון מתקיים במקרים  $-1 < x < 1$  ו-  $x > 1\frac{1}{2}$ . יחד עם הערכים  $x = 1$

ו-  $x = 1\frac{1}{2}$  שמצאנו בהתחלה, נקבל שקבוצת הפתרונות היא  $(-1, 1] \cup [1\frac{1}{2}, \infty)$ .

$$(x+1)(x+4)(2-x)(3-x) \leq 0 \quad \text{ג. נפתור:}$$

ננתח את קבוצת ההתאפסות, החיוביות והשליליות של כל אחד מהגורמים:

| הביטוי | מתאפס עבור | חיובי עבור | שלילי עבור |
|--------|------------|------------|------------|
| $x+1$  | $x=-1$     | $x>-1$     | $x<-1$     |
| $x+4$  | $x=-4$     | $x>-4$     | $x<-4$     |
| $2-x$  | $x=2$      | $x<2$      | $x>2$      |
| $3-x$  | $x=3$      | $x<3$      | $x>3$      |

אם  $x$  שווה לאחד המספרים  $-4, -1, 2, 3$  אז האגף השמאלי באי־שוויון מתאפס, ולכן האי־שוויון מתקיים. עבור ערכים אחרים, ננתח לפי הטבלה הבאה:

| המקרה         | הביטוי $x+4$ | הביטוי $x+1$ | הביטוי $2-x$ | הביטוי $3-x$ | המכפלה $(x+1)(x+4) \cdot (2-x)(3-x)$ |
|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------------------------|
| $x < -4$      | -            | -            | +            | +            | +                                    |
| $-4 < x < -1$ | +            | -            | +            | +            | -                                    |
| $-1 < x < 2$  | +            | +            | +            | +            | +                                    |
| $2 < x < 3$   | +            | +            | -            | +            | -                                    |
| $x > 3$       | +            | +            | -            | -            | +                                    |

המכפלה שלילית כאשר  $-4 < x < -1$  או  $2 < x < 3$ . בצירוף הנקודות שמצאנו בהתחלה (ובהן מתקיים שוויון), נקבל כי קבוצת הפתרונות היא  $[-4, -1] \cup [2, 3]$ .

$$\frac{2}{x-5} \geq \frac{3}{x-6} \quad \text{ד. נפתור:}$$

נעביר אגפים (על ידי הפחתת  $3/(x-6)$  משני האגפים):

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-5} - \frac{3}{x-6} \geq 0$$

נפשט את האגף השמאלי:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-5} - \frac{3}{x-6} &= \frac{2(x-6) - 3(x-5)}{(x-5)(x-6)} = \frac{(2x-12) - (3x-15)}{(x-5)(x-6)} \\ &= \frac{2x-12-3x+15}{(x-5)(x-6)} = \frac{3-x}{(x-5)(x-6)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-x}{(x-5)(x-6)} \geq 0 \quad \text{לכן האי־שוויון שקול ל:}$$

ננתח את קבוצת ההתאפסות, החיוביות והשליליות של כל אחד מהגורמים במונה ובמכנה:

| הביטוי  | מתאפס עבור | חיובי עבור | שלילי עבור |
|---------|------------|------------|------------|
| $3 - x$ | $x = 3$    | $x < 3$    | $x > 3$    |
| $x - 5$ | $x = 5$    | $x > 5$    | $x < 5$    |
| $x - 6$ | $x = 6$    | $x > 6$    | $x < 6$    |

אם  $x = 3$  אז האגף השמאלי באי־שוויון מתאפס, ולכן האי־שוויון מתקיים.  
 אם  $x = 5$  או  $x = 6$  אז האגף השמאלי אינו מוגדר ולכן האי־שוויון אינו מתקיים.  
 עבור ערכים אחרים, ננתח לפי הטבלה הבאה:

| המקרה       | הביטוי $3 - x$ | הביטוי $x - 5$ | הביטוי $x - 6$ | הביטוי $\frac{3 - x}{(x - 5)(x - 6)}$ |
|-------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------------|
| $x < 3$     | +              | -              | -              | +                                     |
| $3 < x < 5$ | -              | -              | -              | -                                     |
| $5 < x < 6$ | -              | +              | -              | +                                     |
| $x > 6$     | -              | +              | +              | -                                     |

המכפלה חיובית כאשר  $x < 3$  או  $5 < x < 6$ . בצירוף הנקודה 3 שמצאנו בהתחלה (בה מתקיים שוויון), נקבל כי קבוצת הפתרונות היא  $(-\infty, 3] \cup (5, 6)$ .

השאלה בעמוד 163

## תשובה 20

נתון האי־שוויון:

$$\frac{5x + 3}{x + 1} \geq \frac{x - 5}{4x + 2}$$

בדומה לאי־שוויון החזק שפתרנו, נעביר אגפים ונפשט.

$$\Leftrightarrow \frac{19x^2 + 26x + 11}{(x + 1)(4x + 2)} \geq 0$$

נקבל אי־שוויון שקול:

כפי שניתחנו, המונה באגף השמאלי חיובי תמיד, ולכן לא מתאפס אף פעם. לכן האגף השמאלי כולו לא מתאפס (אם השבר היה מתאפס, אז על ידי הכפלה במכנה היינו מקבלים שהמונה מתאפס, וזו סתירה).

$$\Leftrightarrow \frac{19x^2 + 26x + 11}{(x + 1)(4x + 2)} > 0$$

לכן האי־שוויון שקול לאי־שוויון החזק:

$$(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

מכאן שהפתרון לא השתנה, וקבוצת הפתרונות היא:

השאלה בעמוד 163

## תשובה 21

א. נפתור:

$$(x-2)^2 < 3x+12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 3x + 12 \quad \text{נפתח סוגריים:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 < 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\text{נפתור את המשוואה הריבועית } x^2 - 7x - 8 = 0:$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 8$$

$$x^2 - 7x - 8 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 1)(x - 8) \quad \text{מכאן מתקבל הפירוק}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 8) < 0 \quad \text{האי־שוויון המקורי שקול אפוא ל:}$$

$$\text{מניתוח סימן המכפלה במקרים השונים } (x > 8, -1 < x < 8, x < -1)$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 8$$

קבוצת הפתרונות היא  $(-1, 8)$ .

ב. נפתור:

$$\frac{x-2}{3x-8} > \frac{x}{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3x-8} - \frac{x}{x+4} > 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

נפשט את האגף השמאלי:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3x-8} - \frac{x}{x+4} &= \frac{(x-2)(x+4) - (3x-8)x}{(3x-8)(x+4)} \\ &= \frac{(x^2 + 4x - 2x - 8) - (3x^2 - 8x)}{(3x-8)(x+4)} \\ &= \frac{-2x^2 + 10x - 8}{(3x-8)(x+4)} = \frac{-2(x^2 - 5x + 4)}{(3x-8)(x+4)} \end{aligned}$$

$$\text{כדי לנתח את הביטוי } x^2 - 5x + 4, \text{ נפתור את המשוואה } x^2 - 5x + 4 = 0:$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x - 4) \quad \text{לכן}$$

$$\frac{x-2}{3x-8} - \frac{x}{x+4} = \frac{-2(x-1)(x-4)}{(3x-8)(x+4)} \quad \text{נציב בפיתוח הקודם:}$$

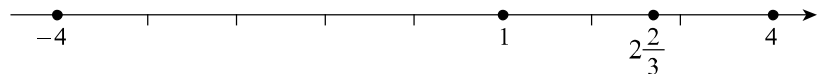
$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-1)(x-4)}{(3x-8)(x+4)} > 0 \quad \text{לכן האי־שוויון המקורי שקול ל:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{(3x-8)(x+4)} < 0 \quad \text{נחלק ב־2 (כיוון האי־שוויון מתהפך):}$$

ננתח את סימני הגורמים במונה ובמכנה:

| הביטוי   | מתאפס עבור               | חיובי עבור         | שלילי עבור         |
|----------|--------------------------|--------------------|--------------------|
| $x - 1$  | $x = 1$                  | $x > 1$            | $x < 1$            |
| $x - 4$  | $x = 5$                  | $x > 4$            | $x < 4$            |
| $3x - 8$ | $x = 8/3 = 2\frac{2}{3}$ | $x > 2\frac{2}{3}$ | $x < 2\frac{2}{3}$ |
| $x + 4$  | $x = -4$                 | $x > -4$           | $x < -4$           |

נציג את נקודות ההתאפסות על ציר המספרים:



בנקודות  $-4, 1, 2\frac{2}{3}, 4$  האגף השמאלי מתאפס או לא מוגדר, ולכן האי-שוויון לא

מתקיים. בשאר הנקודות, מניתוח סימן הביטוי באגף השמאלי לפי חוקי הסימנים, עולה

כי הביטוי שלילי כאשר  $-4 < x < 1$  או  $2\frac{2}{3} < x < 4$ . לכן קבוצת הפתרונות היא:

$$(-4, 1) \cup (2\frac{2}{3}, 4)$$

השאלה בעמוד 163

## תשובה 22

הביטוי  $\sqrt{x} + \sqrt{1+x-x^2}$  מוגדר אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$x \geq 0 \text{ וגם } 1+x-x^2 \geq 0$$

נבדוק מתי מתקיים  $1+x-x^2 \geq 0$ : לפי תכונת ההיפוך, אי-שוויון זה שקול לאי-שוויון

$$-(1+x-x^2) \leq 0, \text{ כלומר } x^2 - x - 1 \leq 0. \text{ נפתור את המשוואה הריבועית המתאימה:}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618, x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

לכן  $x^2 - x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$ , ומתקבל האי-שוויון השקול  $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ .

מניתוח סימן המכפלה מתקבל שאי-שוויון זה מתקיים אם ורק אם  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

כדי שהביטוי שבשאלה יהיה מוגדר, צריך להתקיים גם  $x \geq 0$ , ולכן הביטוי מוגדר עבור

$$0 \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{כלומר: } 0 \leq x \leq x_2$$

במילים אחרות, קבוצת ערכי  $x$  שעבורם הביטוי מוגדר היא:  $\left[0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$

## תשובה 23

א. טענה: לכל  $a$  מתקיים:  $|a| = |-a|$ .

הוכחה: נתבונן בנפרד במקרים הבאים –

מקרה ראשון:  $a > 0$ .

במקרה זה, לפי הגדרת הערך המוחלט,  $|a| = a$ . כמו כן, מתקיים  $-a < 0$ , ולפי הגדרת הערך המוחלט,  $|-a| = -(-a) = a$ . לכן  $|a| = |-a|$ .

מקרה שני:  $a = 0$ .

במקרה זה,  $|a| = 0 = |-a|$ .

מקרה שלישי:  $a < 0$ .

במקרה זה, לפי הגדרת הערך המוחלט,  $|a| = -a$ . כמו כן, מתקיים  $-a > 0$ , ולפי הגדרת הערך המוחלט,  $|-a| = -a$ . לכן  $|a| = |-a|$ .

וידאנו שהטענה מתקיימת בכל המקרים.  $\square$

ב. טענה: לכל  $a$  ו- $b$ ,  $|a| = |b|$  אם ורק אם  $a = \pm b$ .

הוכחה: אם  $a = b$  אז  $|a| = |b|$ . אם  $a = -b$  אז לפי סעיף א,  $|a| = |-b| = |b|$ . לכן אם  $a = \pm b$  אז  $|a| = |b|$ .

בכיוון ההפוך, נניח שמתקיים  $|a| = |b|$ , ונוכיח ש- $a = \pm b$ :

אם  $a \geq 0$  ו- $b \geq 0$  אז  $|a| = a$  ו- $|b| = b$ , לכן  $a = b$ .

אם  $a \geq 0$  ו- $b < 0$  אז  $|a| = a$  ו- $|b| = -b$ , לכן  $a = -b$ .

אם  $a < 0$  ו- $b \geq 0$  אז  $|a| = -a$  ו- $|b| = b$ , לכן  $-a = b$  ולכן  $a = -b$ .

אם  $a < 0$  ו- $b < 0$  אז  $|a| = -a$  ו- $|b| = -b$ , לכן  $-a = -b$  ולכן  $a = b$ .

וידאנו שבכל המקרים מתקיים  $a = \pm b$ .  $\square$

ג. טענה: לכל  $a$  ו- $b$ ,  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .

הוכחה: אם  $a = 0$  או  $b = 0$  אז  $|ab| = |0| = 0$  וגם  $|a| \cdot |b| = 0$  (כי  $|a| = 0$  או  $|b| = 0$ ), ולכן  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .

נניח מעתה ש- $a \neq 0$  ו- $b \neq 0$ , ונתבונן בארבעת המקרים הבאים, לפי סימני  $a$  ו- $b$ . בכל אחד מהמקרים ניעזר בחוקי הסימנים כדי להוכיח את השוויון  $|ab| = |a| \cdot |b|$ :

אם  $a > 0$  ו- $b > 0$  אז  $ab > 0$ , לכן מתקיים  $|a| = a$ ,  $|b| = b$ ,  $|ab| = ab$ , ומכאן  $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$ .

אם  $a > 0$  ו- $b < 0$  אז  $ab < 0$ , לכן מתקיים  $|a| = a$ ,  $|b| = -b$ ,  $|ab| = -ab$ , ומכאן  $|ab| = -ab = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$ .

אם  $a < 0$  ו- $b > 0$  אז  $ab < 0$ , לכן מתקיים  $|a| = -a$ ,  $|b| = b$ ,  $|ab| = -ab$ , ומכאן  $|ab| = -ab = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|$ .

אם  $a < 0$  ו- $b < 0$  אז  $ab > 0$ , לכן מתקיים  $|a| = -a$ ,  $|b| = -b$ ,  $|ab| = ab$ , ומכאן  $|ab| = ab = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$ .

כפי שראינו, בכל המקרים מתקיים  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .  $\square$

ד. טענה: לכל  $a$ ,  $|a^2| = |a|^2 = a^2$ .

$$|a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$$

הוכחה: מהסעיף הקודם נובע

כמו כן,  $a^2 \geq 0$ , ומהגדרת הערך המוחלט,

□

ה. טענה: לכל  $a$  ו- $b \neq 0$ ,  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

$$|a| = \left|\frac{a}{b} \cdot b\right| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b|$$

הוכחה: נתבונן בשוויון

מכפלות הערך המוחלט נובע:

מההנחה  $b \neq 0$  נובע (לפי תכונות הערך המוחלט) ש- $|b| \neq 0$ . נחלק את השוויון

□

$$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

שקיבלנו ב- $|b|$ , ונקבל:

הערה: ניתן להוכיח גם בחלוקה לארבעה מקרים לפי סימני  $a$  ו- $b$ , בדומה לסעיף ג.

השאלה בעמוד 167

## תשובה 24

א. נתונה המשוואה:

$$\frac{x}{5x+3} = x+1$$

הביטוי  $5x+3$  מתאפס עבור  $x = -3/5$ , חיובי עבור  $x > -3/5$  ושליילי עבור

$x < -3/5$ . נתבונן בחלוקה למקרים:

**מקרה ראשון:**  $x > -3/5$ . במקרה זה המשוואה שקולה למשוואה:

$$\frac{x}{5x+3} = x+1$$

נכפיל ב- $5x+3$  (לפי ההנחה מספר זה חיובי, ובפרט שונה מאפס, לכן נקבל משוואה

$$\Leftrightarrow x = (5x+3)(x+1)$$

שקולה):

$$\Leftrightarrow x = 5x^2 + 3x + 5x + 3 = 5x^2 + 8x + 3$$

נפשט:

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 7x + 3 = 0$$

נעביר אגפים:

קיבלנו משוואה ריבועית. הדיסקרימיננטה שלה שלילית:

$$\Delta = 49 - 60 = -11$$

לכן במקרה זה אין פתרונות.

**מקרה שני:**  $x = -3/5$ . במקרה זה המכנה באגף השמאלי במשוואה המקורית מתאפס,

ולכן אין פתרון.

**מקרה שלישי:**  $x < -3/5$ . במקרה זה  $5x+3$  מספר שלילי, לכן  $|5x+3| = -(5x+3)$ ,

והמשוואה המקורית שקולה ל:

$$\frac{x}{-(5x+3)} = x+1$$

נכפיל ב- $-(5x+3)$  (לפי ההנחה מספר זה חיובי, ובפרט שונה מאפס, לכן נקבל משוואה

$$\Leftrightarrow x = -(5x+3)(x+1)$$

שקולה):

$$\Leftrightarrow x = -(5x^2 + 8x + 3)$$

נפשט:

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 9x + 3 = 0$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 60}}{10} = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{10} \quad \text{נפתור את המשוואה הריבועית:}$$

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{21}}{10} \approx -1.358, \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{21}}{10} \approx -0.441 \quad \text{הפתרונות הם:}$$

מבין שני הפתרונות, רק הפתרון  $x_1$  מקיים את התנאי  $x < -3/5 = -0.6$ . לכן  $x_1$  הוא הפתרון היחיד במקרה זה.

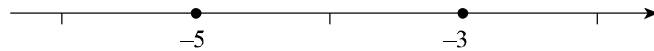
לסיכום, רק במקרה השלישי התקבל פתרון, ולכן הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$x = \frac{-9 - \sqrt{21}}{10} \quad \text{הפתרון הוא:}$$

$$|x + 5| \leq |x + 3| \quad \text{ב. נפתור את האי־שוויון:}$$

הביטויים  $x + 3$  ו־ $x + 5$  מתאפסים עבור  $x = -3$  ו־ $x = -5$ , בהתאמה.

נתבונן בנקודות אלה:



בהתאם לכך, נתבונן במקרים הבאים:

**מקרה ראשון:**  $x \leq -5$ . במקרה זה מתקיים  $x + 5 \leq 0$  ו־ $x + 3 < 0$ , לכן

$$|x + 5| = -(x + 5), \quad |x + 3| = -(x + 3), \quad \text{ומתקבל האי־שוויון השקול}$$

$$\Leftrightarrow -(x + 5) \leq -(x + 3)$$

$$\Leftrightarrow -x - 5 \leq -x - 3$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -3$$

נוסיף  $x$  לשני האגפים:

אי־שוויון זה מתקיים תמיד. לכן כל  $x \leq -5$  הוא פתרון של האי־שוויון המקורי.

**מקרה שני:**  $-5 < x < -3$ . במקרה זה מתקיים  $x + 5 > 0$  ו־ $x + 3 < 0$ , לכן

$$|x + 5| = x + 5, \quad |x + 3| = -(x + 3), \quad \text{ומתקבל האי־שוויון השקול}$$

$$\Leftrightarrow x + 5 \leq -(x + 3)$$

$$\Leftrightarrow x + 5 \leq -x - 3$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq -8$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow x \leq -4$$

נחלק ב־2:

קבוצת הפתרונות במקרה זה היא  $\{x \mid -5 < x \leq -4\}$ .

**מקרה שלישי:**  $x \geq -3$ . במקרה זה מתקיים  $x + 5 > 0$  ו־ $x + 3 \geq 0$ , לכן  $|x + 5| = x + 5$ ,

$$|x + 3| = x + 3, \quad \text{ומתקבל האי־שוויון השקול}$$

$$\Leftrightarrow x + 5 \leq x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 3$$

נחסר  $x$  משני האגפים:

אי־שוויון זה לא מתקיים אף פעם, לכן במקרה זה אין פתרונות.

לסיכום, האי־שוויון מתקיים עבור כל ערכי  $x$  המקיימים  $x \leq -5$  או  $-5 < x \leq -4$ ,

כלומר לכל  $x \leq -4$ . קבוצת הפתרונות היא  $(-\infty, -4]$ .



ג. נפתור את המשוואה:  $|5 - x| = 8$   
 כזכור,  $|a| = |b|$  אם ורק אם  $a = \pm b$ . לכן  $|5 - x| = 8 = |8|$  שקול לכך ש-  
 $5 - x = \pm 8$ . נבחן כל אחת משתי האפשרויות:  
 אם  $5 - x = 8$  אז  $|x| = -3$ . אפשרות זו לא תיתכן כי מתקיים תמיד  $|x| \geq 0$ .  
 אם  $5 - x = -8$  אז  $|x| = 13$  ולכן  $x = \pm 13$ . ובכיוון ההפוך: אם  $x = \pm 13$  אז  
 $|x| = 13$  ולכן  $5 - x = -8$ .  
 לכן פתרונות המשוואה הם  $x = 13$  ו-  $x = -13$ .

ד. נוכיח כי לכל  $x$  מתקיים:  $|x + 5| + |x - 3| \geq 8$   
 הביטויים  $x + 5$  ו-  $x - 3$  מתאפסים עבור  $x = -5$  ו-  $x = 3$ , בהתאמה.  
 בדומה לסעיף ב, נתבונן בחלוקה למקרים הבאים:

**מקרה ראשון:**  $x \leq -5$ . במקרה זה מתקיים  $x + 5 \leq 0$  ו-  $x - 3 < 0$ , לכן  
 $|x + 5| = -(x + 5)$ ,  $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$ . מכאן:  
 $|x + 5| + |x - 3| = -(x + 5) + (3 - x) = -x - 5 + 3 - x = -2x - 2$   
 כעת נתבונן בביטוי  $-2x - 2$  וננסה להעריכו.  
 מההנחה  $x \leq -5$  נקבל (על ידי כפל ב-2, המחייב היפוך כיוון האי-שוויון):

$$\begin{aligned} \Rightarrow -2x &\geq 10 \\ \Rightarrow -2x - 2 &\geq 8 \\ \Rightarrow |x + 5| + |x - 3| &\geq 8 \end{aligned}$$

נחסר 2 משני האגפים:  
 מהשוויון (1) נובע שמתקיים במקרה זה:

**מקרה שני:**  $-5 < x < 3$ . במקרה זה מתקיים  $x + 5 > 0$  ו-  $x - 3 < 0$ , לכן  
 $|x + 5| = x + 5$ ,  $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$ . מכאן:  
 $|x + 5| + |x - 3| = (x + 5) + (3 - x) = 8$   
 ובפרט:

**מקרה שלישי:**  $x \geq 3$ . במקרה זה מתקיים  $x + 5 > 0$  ו-  $x - 3 \geq 0$ , לכן  $|x + 5| = x + 5$ ,  
 $|x - 3| = x - 3$ . מכאן:

$$\begin{aligned} (2) \quad |x + 5| + |x - 3| &= (x + 5) + (x - 3) = 2x + 2 \\ \Rightarrow 2x &\geq 6 && \text{מההנחה } x \geq 3 \text{ נקבל (על ידי כפל ב-2):} \\ \Rightarrow 2x + 2 &\geq 8 && \text{נוסיף 2 לשני האגפים:} \\ \Rightarrow |x + 5| + |x - 3| &\geq 8 && \text{מהשוויון (2) נובע שמתקיים במקרה זה:} \end{aligned}$$

וידאנו שבכל המקרים מתקיים  $|x + 5| + |x - 3| \geq 8$ .  $\square$

א. לפי אי-שוויון המשולש והתכונה  $|-a| = |a|$ :  
 $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$

ב. לפי הסעיף הקודם וכפליית הערך המוחלט:

$$|5a - 3b| \leq |5a| + |3b| = 5|a| + 3|b|$$

ג. לפי אי-שוויון המשולש:  $|a + b + c| = |(a + b) + c| \leq |a + b| + |c|$

$$\leq |a| + |b| + |c|$$

שוב לפי אי-שוויון המשולש:

ד. נוכיח את האי-שוויון:  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

**מקרה ראשון:**  $|a| - |b| \geq 0$ .

במקרה זה, מתקיים  $||a| - |b|| = |a| - |b|$

ולכן האי-שוויון המבוקש שקול ל:  $|a| - |b| \leq |a - b|$

נוסיף  $|b|$  לשני האגפים ונקבל אי-שוויון שקול:  $|a| \leq |a - b| + |b|$

אך לפי אי-שוויון המשולש, מתקיים:  $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$

כפי שרצינו להוכיח.

**מקרה שני:**  $|a| - |b| < 0$ .

במקרה זה, מתקיים  $||a| - |b|| = -(|a| - |b|) = |b| - |a|$

ולכן האי-שוויון המבוקש שקול ל:  $|b| - |a| \leq |a - b|$

נוסיף  $|a|$  לשני האגפים ונקבל אי-שוויון שקול:  $|b| \leq |a - b| + |a|$

לפי התכונה  $|-a| = |a|$ , מתקיים  $|a - b| = |-(a - b)| = |b - a|$ . מכאן השקילות:

$|b| \leq |b - a| + |a|$

לפי אי-שוויון המשולש, מתקיים:  $|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a|$

כפי שרצינו להוכיח.

□ וידאנו שהאי-שוויון  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  מתקיים בכל המקרים.

השאלה בעמוד 168

## תשובה 26

נוכיח:

$$|x + 2| - |x + 3| \leq 1$$

נעביר אגפים ונקבל אי-שוויון שקול:  $|x + 2| \leq |x + 3| + 1$

לפי אי-שוויון המשולש מתקיים:

$$|x + 2| = |(x + 3) + (-1)| \leq |x + 3| + |-1| = |x + 3| + 1$$

כפי שרצינו להוכיח.

השאלה בעמוד 168

## תשובה 27

א. האי-שוויון  $-|x| \leq x \leq |x|$  מתקיים תמיד. נוכיח זאת:

נוכיח תחילה כי מתקיים  $x \leq |x|$ . נעשה זאת בחלוקה למקרים:

**מקרה ראשון:**  $x \geq 0$ .

במקרה זה מתקיים  $|x| = x$  ובפרט,  $x \leq |x|$ .

**מקרה שני:**  $x < 0$ .

במקרה זה מתקיים  $x \leq 0$  (נובע מההנחה) וגם  $0 \leq |x|$  (נכון תמיד), ולכן מהטרנזיטיביות,  $x \leq |x|$ .

הוכחנו שמתקיים לכל  $x$ ,  $x \leq |x|$ . מכאן נובע (בהצבת  $-x$  במקום  $x$ ):

$$-x \leq |-x| = |x|$$

מתכונת היפוך האי־שוויון נקבל:

$$x \geq -|x|$$

ביחד עם מה שהוכחנו קודם, נקבל:

$$\square \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

ב. הטענה ש-  $|x - y| \leq x + y$  לכל  $x$  ו- $y$  אינה נכונה. לדוגמה, אם  $x = 0$  ו- $y = -1$  אז  $|x - y| = 1$  ו- $x + y = -1$ .

ג. האי־שוויון  $|x + y| \leq x^2 + y^2$  נכון תמיד. נוכיח זאת:

בשאלה 23 ראינו ש-  $x^2 = |x|^2$ . באותו אופן,  $y^2 = |y|^2$ .

מכפלות הערך המוחלט (שגם הוכחה בשאלה 23) נובע:

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

לכן האי־שוויון שקול ל:

$$\Leftrightarrow 2|x| \cdot |y| \leq |x|^2 + |y|^2$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| \cdot |y| + |y|^2 \geq 0$$

לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$\Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0$$

אי־שוויון זה נכון תמיד (לפי תכונת אי־שליליות הריבוע).

□

השאלה בעמוד 169

## תשובה 28

1. נוכיח את תכונת האי־שליליות של המרחק: לכל  $a, b$  ממשיים, לפי ההגדרה,

$$\square \quad d(a, b) = |a - b| \quad \text{הערך המוחלט של כל מספר הוא אי־שלילי, לכן } d(a, b) \geq 0.$$

2. נוכיח ש-  $d(a, b) = 0$  אם ורק אם  $a = b$ :

בהסתמך על תכונת הערך המוחלט שלפיה  $|a| = 0$  אם ורק אם  $a = 0$ , מתקיימות

$$\square \quad \text{השליליות הבאות: } d(a, b) = 0 \Leftrightarrow |a - b| = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

3. נוכיח את תכונת הסימטריה של המרחק: בהסתמך על תכונת הערך המוחלט שלפיה

$$\square \quad d(a, b) = |a - b| = |-(a - b)| = |b - a| = d(b, a) \quad \text{מתקיים: } |a| = |-a|$$

השאלה בעמוד 170

## תשובה 29

נתונים המספרים  $a$  ו- $b$ , המייצגים נקודות על הישר, ונתונה הנקודה  $m = (a + b)/2$ .

נחשב את מרחק הנקודה  $m$  מכל אחת מהנקודות  $a, b$ :

$$d(a, m) = |a - m| = \left| a - \frac{a + b}{2} \right| = \left| \frac{2a - (a + b)}{2} \right| = \left| \frac{a - b}{2} \right| = \frac{|a - b|}{2} = \frac{d(a, b)}{2}$$

$$d(b, m) = |b - m| = \left| b - \frac{a + b}{2} \right| = \left| \frac{2b - (a + b)}{2} \right| = \left| \frac{b - a}{2} \right| = \frac{|b - a|}{2} = \frac{d(b, a)}{2}$$

מתכונת הסימטריה  $d(a,b) = d(b,a)$  נובע ש-  $d(a,m) = d(b,m)$ , כלומר  $m$  היא במרחקים שווים מהנקודות  $a$  ו-  $b$ .  $\square$

**הערה:** במהלך ההוכחה ראינו דבר נוסף, והוא שמרחק הנקודה  $m$  מכל אחת מהנקודות  $a$  ו-  $b$  שווה למחצית המרחק שבין  $a$  ו-  $b$ .

השאלה בעמוד 171

**תשובה 30**

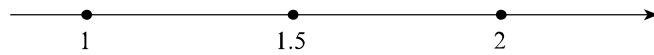
א. נתון האי-שוויון:

$$|x - 2| \leq |x - 1|$$

נציג אותו כך:

$$d(x, 2) \leq d(x, 1)$$

אנו נדרשים לאפיין את כל הנקודות על הישר שמרחקן מהנקודה 2 לא עולה על מרחקן מהנקודה 1. נציין על הישר את הנקודות 1 ו-2, וגם את נקודת האמצע שלהן  $(1+2)/2 = 1.5$



קבוצת הנקודות המבוקשת היא קבוצת הנקודות המורכבת מנקודת האמצע 1.5 ומהנקודות הנמצאות ימינה ממנה. כלומר: הקבוצה  $\{x \mid x \geq 1.5\}$ , שהיא הקטע  $[1.5, \infty)$ .

ב. נתון האי-שוויון:

$$|x + 2| < |x + 6|$$

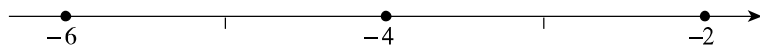
נציג אותו כך:

$$|x - (-2)| < |x - (-6)|$$

כלומר,

$$d(x, -2) < d(x, -6)$$

אנו נדרשים לאפיין את כל הנקודות על הישר שמרחקן מהנקודה -2 קטן ממרחקן מהנקודה -6. נציין על הישר את הנקודות האלה ואת נקודת האמצע שלהן  $((-2) + (-6))/2 = -4$



קבוצת הנקודות המבוקשת היא קבוצת הנקודות הנמצאות מימין לנקודת האמצע -4, כלומר: הקבוצה  $\{x \mid x > -4\}$ , שהיא הקטע  $(-4, \infty)$ .

השאלה בעמוד 173

**תשובה 31**א. נניח ש-  $|x - 5| < 0.01$ , ונוכיח ש-  $|x^2 - 3x - 10| < 0.14$ :נציג  $5^2 - 3 \cdot 5 = 10$ . לכן:

$$|x^2 - 3x - 10| = |x^2 - 3x - (5^2 - 3 \cdot 5)|$$

$$= |(x^2 - 5^2) - (3x - 3 \cdot 5)|$$

$$\leq |x^2 - 5^2| + |3x - 3 \cdot 5|$$

לפי אי-שוויון המשולש:

$$= |(x + 5)(x - 5)| + |3(x - 5)|$$

$$= |x + 5| \cdot |x - 5| + 3|x - 5|$$

לפי כפליות הערך המוחלט:

$$\leq |x + 5| \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.01$$

לפי הנתון:

$\triangleleft$  מאי-שוויון המשולש נובע  $|a - b| \leq |a| + |b|$  (ראו שאלה 25א).

נערך את  $|x+5|$  :  $|x-5| < 0.01$ , לכן  $5 - 0.01 < x < 5 + 0.01$ , ולכן  $9.99 < x+5 < 10.01$ . בפרט,  $0 < x+5 < 11$  ולכן  $|x+5| = x+5 < 11$ . מהערכה זו נקבל:

$$|x^2 - 3x - 10| < 11 \cdot 0.01 + 0.03 = 0.11 + 0.03 = 0.14$$

ב. נניח ש-  $|x+3| < 0.1$ , ונזכיר ש-  $|x^2 - 9| < 0.7$ :

$$|x^2 - 9| = |x^2 - 3^2| = |(x+3)(x-3)| = |x+3| \cdot |x-3| \leq 0.1|x-3|$$

נערך את  $|x-3|$  : נתון ש-  $|x+3| < 0.1$ , כלומר  $|x-(-3)| < 0.1$ , ולכן  $-3 - 0.1 < x < -3 + 0.1$ . מכאן נקבל  $-6.1 < x-3 < -5.9$ , ובפרט  $-7 < x-3 < 0$ . מתכונת היפוך האי-שוויון,  $0 < -(x-3) < 7$ . לכן:

$$|x-3| = -(x-3) < 7$$

$$|x^2 - 9| \leq 0.1|x-3| < 0.1 \cdot 7 = 0.7$$

לפיכך,

השאלה בעמוד 174

### תשובה 32

א. נפתור:

$$(x-3)^2 < (x-5)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < x^2 - 4x - 5 \quad \text{נפתח סוגריים בשני האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 < -4x - 5 \quad \text{נחסר } x^2 \text{ משני האגפים:}$$

$$\Leftrightarrow 2x > 14 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Leftrightarrow x > 7 \quad \text{נחלק ב-2:}$$

קבוצת הפתרונות היא  $\{x \mid x > 7\}$ , כלומר,  $(7, \infty)$ .

$$\frac{x}{x-1} \leq 3 \quad \text{ב. נפתור:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - 3 \leq 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

נפשט את האגף השמאלי:

$$\frac{x}{x-1} - 3 = \frac{x - 3(x-1)}{x-1} = \frac{x - (3x-3)}{x-1} = \frac{3-2x}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-2x}{x-1} \leq 0 \quad \text{מתקבל האי-שוויון השקול:}$$

ננתח את סימני הביטויים במונה ובמכנה:

| הביטוי | מתאפס עבור | חיובי עבור | שלילי עבור |
|--------|------------|------------|------------|
| $3-2x$ | $x=1.5$    | $x < 1.5$  | $x > 1.5$  |
| $x-1$  | $x=1$      | $x > 1$    | $x < 1$    |

בהתאם לכך, ננתח את סימן הביטוי שבאגף השמאלי בחלוקה למקרים הבאים:

| המקרה         | הביטוי<br>$3 - 2x$ | הביטוי<br>$x - 1$ | הביטוי<br>$\frac{3 - 2x}{x - 1}$ |
|---------------|--------------------|-------------------|----------------------------------|
| $x < 1$       | +                  | -                 | -                                |
| $x = 1$       | +                  | 0                 | לא מוגדר                         |
| $1 < x < 1.5$ | +                  | +                 | +                                |
| $x = 1.5$     | 0                  | +                 | 0                                |
| $x > 1.5$     | -                  | +                 | -                                |

מכאן נקבל שהאי־שוויון מתקיים אם ורק אם  $x < 1$  או  $x \geq 1.5$ . קבוצת הפתרונות היא  $(-\infty, 1) \cup [1.5, \infty)$ .

$$\frac{12x^2 - 9x + 7}{5x^2 - 7x + 2} < 2 \quad \text{ג. נפתור:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x^2 - 9x + 7}{5x^2 - 7x + 2} - 2 < 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

נפשט את האגף השמאלי:

$$\begin{aligned} \frac{12x^2 - 9x + 7}{5x^2 - 7x + 2} - 2 &= \frac{12x^2 - 9x + 7 - 2(5x^2 - 7x + 2)}{5x^2 - 7x + 2} \\ &= \frac{12x^2 - 9x + 7 - (10x^2 - 14x + 4)}{5x^2 - 7x + 2} \\ &= \frac{2x^2 + 5x + 3}{5x^2 - 7x + 2} \end{aligned}$$

נפרק לגורמים את הביטויים במונה ובמכנה: כדי לפרק לגורמים את המונה, נפתור את המשוואה הריבועית  $2x^2 + 5x + 3 = 0$ . לפי נוסחת השורשים מתקבלים הפתרונות  $x_1 = -1.5$ ,  $x_2 = -1$  ומכאן מתקבל הפירוק

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 3 &= 2(x - x_1)(x - x_2) = 2(x + 1.5)(x + 1) \\ &= (2x + 3)(x + 1) \end{aligned}$$

נפרק לגורמים את המכנה: פתרונות המשוואה  $5x^2 - 7x + 2 = 0$  הם

$$x_1 = 0.4, x_2 = 1$$

$$5x^2 - 7x + 2 = 5(x - 0.4)(x - 1) = (5x - 2)(x - 1) \quad \text{ולכן}$$

נציב את הביטויים שקיבלנו ונקבל את האי־שוויון (השקול לאי־שוויון המקורי)

$$\Leftrightarrow \frac{(2x + 3)(x + 1)}{(5x - 2)(x - 1)} < 0$$

נקודות ההתאפסות של הגורמים במונה ובמכנה (מסודרות לפי גודלן) הן:

$$-1.5, -1, 0.4, 1$$

כאשר  $x$  שווה לאחד הערכים האלה, הביטוי באגף השמאלי מתאפס או לא מוגדר, ולכן האי-שוויון לא מתקיים. עבור שאר ערכי  $x$  האפשריים, ננתח את סימן הביטוי לפי חוקי הסימנים בחלוקה למקרים

$$x < -1.5, -1.5 < x < -1, -1 < x < 0.4, 0.4 < x < 1, x > 1$$

לא נפרט ניתוח זה הדומה לניתוח בשאלות קודמות. קבוצת הפתרונות המתקבלת היא:

$$(-1.5, -1) \cup (0.4, 1)$$

ד. (פתרון מקוצר)

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} < 0$$

הערכים  $x = 0$ ,  $x = -1$  אינם פתרונות (המכנה באגף השמאלי מתאפס).  
מניתוח סימן הביטוי באגף השמאלי בחלוקה למקרים  $x < -1$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $x > 0$  מתקבל שקבוצת הפתרונות היא הקטע  $(-1, 0)$ .

ה. (פתרון מקוצר)

$$\frac{x}{x-1} > \frac{2x}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2}{(x-1)(x-2)} > 0$$

הערך  $x = 0$  אינו פתרון של האי-שוויון. עבור  $x \neq 0$ , הביטוי  $x^2$  חיובי וניתן לחלק בו, ולקבל אי-שוויון שקול:

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} < 0$$

הערכים  $x = 1$ ,  $x = 2$  אינם אפשריים (בגלל חילוק באפס). מניתוח סימן הביטוי בחלוקה למקרים  $x < 1$ ,  $1 < x < 2$ ,  $x > 2$  מתקבל שהאי-שוויון מתקיים אם ורק אם  $1 < x < 2$ . כל הערכים בתחום זה מקיימים את התנאי  $x \neq 0$ . לכן זו קבוצת הפתרונות של האי-שוויון המקורי. קבוצת הפתרונות היא אפוא הקטע  $(1, 2)$ .

ו. נפתור את האי-שוויון:

$$x \geq 7\sqrt{x} - 12$$

נגדיר  $y = \sqrt{x}$ . ערך זה מקיים בהכרח  $y \geq 0$ . מתקבל האי-שוויון:

$$\Leftrightarrow y^2 \geq 7y - 12$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y + 12 \geq 0$$

נעביר אגפים:

נפרק לגורמים את האגף השמאלי: פתרונות המשוואה  $y^2 - 7y + 12 = 0$  הם

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow y_1 = 3, y_2 = 4$$

לכן  $y^2 - 7y + 12 = (y-3)(y-4)$ , ומתקבל האי-שוויון

$$\Leftrightarrow (y-3)(y-4) \geq 0$$

ראו שאלה 34 שבהמשך, להצדקה מפורטת של שקילות זו.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 0 \leq y \leq 3 \text{ או } y \geq 4 && \text{מניתוח סימן המכפלה } (y-3)(y-4) \text{ נקבל:} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \text{ או } \sqrt{x} \geq 4 && \text{נחזור למשתנה המקורי, } x: \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9 \text{ או } x \geq 16 && \text{נעלה בריבוע (בכל אחת מהאפשרויות):} \\ &[0,9] \cup [16,\infty) && \text{קבוצת הפתרונות היא:} \end{aligned}$$

$$|x| \leq 5x + 2 \quad \text{ז. נפתור:}$$

נפריד למקרים לפי סימנו של  $x$ .

**מקרה ראשון:**  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x \leq 5x + 2 && \text{במקרה זה } |x| = x, \text{ ומתקבל האי־שוויון} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 4x + 2 \Leftrightarrow 4x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -0.5 && \\ &\text{התנאי } x \geq -0.5 \text{ מתקיים לכל } x \geq 0. \text{ לכן במקרה זה האי־שוויון מתקיים תמיד.} \end{aligned}$$

**מקרה שני:**  $x < 0$ .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -x \leq 5x + 2 && \text{במקרה זה } |x| = -x, \text{ ומתקבל האי־שוויון} \\ &\Leftrightarrow 6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -1/3 && \\ &\text{קבוצת הפתרונות במקרה זה היא } \{x \mid -1/3 \leq x < 0\}. \\ &\text{מאיחוד הפתרונות בשני המקרים מתקבל כי קבוצת הפתרונות היא } [-1/3, \infty). \end{aligned}$$

$$|x^2 + 2x| < 8 \quad \text{ח. נתון האי־שוויון:}$$

ראינו בשיעור שהאי־שוויון  $|a| < r$  שקול לכך ש־ $-r < a < r$ , כלומר ש־ $a < r$  וגם  $a > -r$ . לכן האי־שוויון הנתון שקול ל:

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x < 8 \text{ וגם } x^2 + 2x > -8$$

נפתור כל אי־שוויון בנפרד.

נפתור את האי־שוויון  $x^2 + 2x < 8$ : אי־שוויון זה שקול לכך ש־ $x^2 + 2x - 8 < 0$ . פתרונות המשוואה הריבועית  $x^2 + 2x - 8 = 0$  הם

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2$$

לכן מתקיים הפירוק  $x^2 + 2x - 8 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 4)(x - 2)$ , ומתקבל אי־שוויון שקול  $(x + 4)(x - 2) < 0$ . מניתוח סימן המכפלה מתקבל שקבוצת הפתרונות של אי־שוויון זה היא  $\{x \mid -4 < x < 2\}$ .

נפתור את האי־שוויון  $x^2 + 2x > -8$ . אי־שוויון זה שקול לכך ש־ $x^2 + 2x + 8 > 0$ . הדיסקרימיננטה של הביטוי  $x^2 + 2x + 8$  היא  $2^2 - 4 \cdot 8 = -28$ . הדיסקרימיננטה שלילית (והמקדם של  $x^2$  חיובי), לכן הביטוי  $x^2 + 2x + 8$  חיובי **תמיד**. לכן האי־שוויון  $x^2 + 2x > -8$  מתקיים עבור כל ערך של  $x$ .

מכאן נסיק שקבוצת הפתרונות של האי־שוויון  $|x^2 + 2x| < 8$  זהה לקבוצת הפתרונות של האי־שוויון  $x^2 + 2x < 8$ . קבוצה זו היא  $\{x \mid -4 < x < 2\}$ , כלומר הקטע  $(-4, 2)$ .



### תשובה 33

א. נתונה המשוואה:

$$|x - 2| + |x + 2| = 4$$

נפתור בהפרדה למקרים.

**מקרה ראשון:**  $x < -2$

במקרה זה מתקיים גם  $x < 2$ . לכן  $x + 2 < 0$  ו-  $x - 2 < 0$ , ולפי הגדרת הערך המוחלט

$$|x + 2| = -(x + 2), |x - 2| = -(x - 2)$$

מתקבלת המשוואה:

$$\Leftrightarrow -(x - 2) + (-(x + 2)) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2 - x - (x + 2) = 4 \Leftrightarrow 2 - x - x - 2 = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$$

הערך  $x = -2$  לא מקיים  $x < -2$ , לכן במקרה זה אין פתרונות.

**מקרה שני:**  $-2 \leq x \leq 2$

במקרה זה  $x + 2 \geq 0$  ו-  $x - 2 \leq 0$ , ולפי הגדרת הערך המוחלט

$$|x + 2| = x + 2, |x - 2| = -(x - 2)$$

$$\Rightarrow |x - 2| + |x + 2| = -(x - 2) + x + 2 = 2 - x + x + 2 = 4$$

לכן, במקרה זה המשוואה מתקיימת לכל ערכי  $x$ .

**מקרה שלישי:**  $x > 2$

במקרה זה מתקיים גם  $x > -2$ . לכן  $x - 2 > 0$  ו-  $x + 2 > 0$ , ולפי הגדרת הערך

$$|x + 2| = x + 2, |x - 2| = x - 2$$

המוחלט

$$\Leftrightarrow x - 2 + x + 2 = 4$$

מתקבלת המשוואה:

$$\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

הערך  $x = 2$  לא מקיים  $x > 2$ , לכן במקרה זה אין פתרונות.

לסיכום, רק במקרה השני יש פתרונות למשוואה, והפתרונות הם כל נקודות הקטע  $[-2, 2]$ .

**הערה:** ניתן לשלול את המקרה הראשון והשלישי יותר בקצרה, בעזרת אי־שוויון המשולש:

מהמשוואה הנתונה  $|x - 2| + |x + 2| = 4$  מתקבל

$$|2x| = |(x + 2) + (x - 2)| \leq |x + 2| + |x - 2| = 4$$

כלומר  $|2x| \leq 4$ . אבל  $|2x| = |2| \cdot |x| = 2|x|$ , לכן  $2|x| \leq 4$ , כלומר  $|x| \leq 2$ . מכאן נובע ש-  $-2 \leq x \leq 2$ , כלומר, בהכרח מתקיים המקרה השני.

$$|x - 2| - |x + 2| = 10$$

ב. נתונה המשוואה:

ניתן לפתור משוואה זו בחלוקה למקרים כמו בסעיף א.

נציג פתרון קצר יותר, בעזרת אי־שוויון המשולש:

בשאלה 25 הוכחנו, כמסקנה מאי־שוויון המשולש, את האי־שוויון

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$||x - 2| - |x + 2|| \leq |(x - 2) - (x + 2)| = |-4| = 4 \quad \text{בפרט, נובע:}$$

$$|x - 2| - |x + 2| = 10 \quad \text{לכן לא יכול להתקיים}$$

כי הערך המוחלט של האגף השמאלי אינו עולה על 4.

לכן, למשוואה הנתונה אין פתרון.

השאלה בעמוד 174

### תשובה 34

נניח ש־ $a, b, c, d$  מספרים אי־שליליים (כלומר גדולים או שווים ל־0).

נוכיח את הטענות הבאות:

א. אם  $a > b$  וגם  $c > d$  אז  $ac > bd$ .

**הוכחה:**

מכך ש־ $a > b \geq 0$  נקבל ש־ $a > 0$ .

מכך ש־ $c > d \geq 0$  נקבל ש־ $c > 0$ .

לכן, לפי חוקי הסימנים:  $ac > 0$ .

אם  $b$  ו־ $d$  חיוביים, אז כל המספרים  $a, b, c, d$  חיוביים, ומכלל הכפלת אי־שוויונות

חיוביים נקבל ש־ $ac > bd$ .

אם לפחות אחד מבין  $b$  ו־ $d$  שווה לאפס, אז  $bd = 0$  ולכן  $ac > bd$  (כי  $ac > 0$ ).  $\square$

ב. (i)  $a > b$  אם ורק אם  $a^2 > b^2$ .

**הוכחה:**

אם  $a > b$  אז לפי סעיף א, ניתן להכפיל אי־שוויון זה בעצמו, ולקבל  $a^2 > b^2$ .

אם  $a^2 > b^2$  אז לא ייתכן ש־ $a < b$  (כי אז לפי מה שהוכחנו עכשיו,  $a^2 < b^2$ ), וגם

לא ייתכן ש־ $a = b$  (כי אז  $a^2 = b^2$ ). לכן  $a > b$ .  $\square$

(ii)  $a \geq b$  אם ורק אם  $a^2 \geq b^2$ .

**הוכחה:**

אם  $a \geq b$  אז  $a > b$  או  $a = b$ . במקרה הראשון נקבל (לפי חלק (i))  $a^2 > b^2$ .

במקרה השני נקבל  $a^2 = b^2$ . לכן בכל מקרה,  $a^2 \geq b^2$ .

אם  $a^2 \geq b^2$  אז לא ייתכן ש־ $a < b$  (כי אז, לפי חלק (i),  $a^2 < b^2$ ). לכן  $a \geq b$ .  $\square$

ג. נוכיח יחד את שתי הטענות:

$$(i) \quad a > b \text{ אם ורק אם } \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

$$(ii) \quad a \geq b \text{ אם ורק אם } \sqrt{a} \geq \sqrt{b}.$$

**הוכחה:**

נסמן  $A = \sqrt{a}$  ו-  $B = \sqrt{b}$ . אז  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ , ומתקיים:

$$A^2 = a, \quad B^2 = b$$

לפי סעיף ב, מתקיים:

$$(i) \quad A > B \text{ אם ורק אם } A^2 > B^2.$$

$$(ii) \quad A \geq B \text{ אם ורק אם } A^2 \geq B^2.$$

כלומר:

$$(i) \quad \sqrt{a} > \sqrt{b} \text{ אם ורק אם } a > b.$$

$$(ii) \quad \sqrt{a} \geq \sqrt{b} \text{ אם ורק אם } a \geq b.$$

□

השאלה בעמוד 174

### תשובה 35

$$\text{נניח ש- } a, b \geq 0 \text{ ונוכיח שמתקיים: } \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{נתחיל מהאי-שוויון השמאלי:}$$

שני האגפים הם אי-שליליים. לפי שאלה 34, ניתן להעלות בריבוע ולקבל אי-שוויון שקול:

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

לפי נוסחאות הכפל המקוצר, והגדרת השורש:

$$\Leftrightarrow a + b \leq (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$\Leftrightarrow a + b \leq a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

לפי חוקי הסימנים, האי-שוויון שקיבלנו מתקיים תמיד, ולכן מתקיים האי-שוויון המבוקש.

$$\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leq \sqrt{a+b} \quad \text{כעת נוכיח את האי-שוויון השמאלי:}$$

$$\Leftrightarrow \left( \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \right)^2 \leq (\sqrt{a+b})^2 \quad \text{גם כאן, נעלה בריבוע לקבלת אי-שוויון שקול:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} + 2\sqrt{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{b}{2}} + \frac{b}{2} \leq a + b \quad \text{לפי נוסחאות הכפל המקוצר:}$$

$$2\sqrt{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{b}{2}} = 2\sqrt{\frac{ab}{4}} = 2\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{4}} = \sqrt{ab} \quad \text{נפשט, לפי תכונות השורש:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \leq a+b \quad \text{לכן נקבל:}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$$

קיבלנו אישוויון אי-שלילי. נעלה בריבוע לקבלת אישוויון שקול:

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{ab})^2 \leq (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{לפי הגדרת השורש, ונוסחאות הכפל המקוצר:}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad \text{לפי נוסחאות הכפל המקוצר:}$$

הגענו לאישוויון שקול המתקיים תמיד, לפי תכונת אי-שליליות הריבוע. לכן מתקיים האי-שוויון המבוקש.

השאלה בעמוד 174

### תשובה 36

$$\text{נניח ש- } |x-2| < 0.01, \text{ ונוכיח שמתקיים } |x^3 - x - 6| < 0.2.$$

$$\text{נשים לב לכך ש- } 2^3 - 2 = 6. \text{ בהתאם לכך ניתן לבטא:}$$

$$x^3 - x - 6 = x^3 - x - (2^3 - 2) = (x^3 - 2^3) - (x - 2)$$

$$\text{ניעזר באישוויון המשולש, ובנוסחת הכפל המקוצר } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2):$$

$$\begin{aligned} |x^3 - x - 6| &= |(x^3 - 2^3) - (x - 2)| \leq |x^3 - 2^3| + |x - 2| \\ &= |(x-2)(x^2 + 2x + 4)| + |x - 2| \\ &= |x-2| \cdot |x^2 + 2x + 4| + |x - 2| \end{aligned}$$

$$\text{נעריך את הביטוי } x^2 + 2x + 4:$$

$$\text{מהנתון } |x-2| < 0.01 \text{ נקבל } 2 - 0.01 < x < 2 + 0.01 \text{ ובפרט } 0 < x < 3.$$

$$\text{לכן } 0 < x^2 < 9 \text{ ו- } 0 < 2x < 6, \text{ ומחיבור האישוויונות נקבל } 0 < x^2 + 2x < 15,$$

$$\text{לכן } 4 < x^2 + 2x + 4 < 19, \text{ ובפרט הביטוי } x^2 + 2x + 4 \text{ חיובי. לכן:}$$

$$|x^2 + 2x + 4| = x^2 + 2x + 4 < 19$$

מכאן נקבל:

$$|x^3 - x - 6| \leq |x-2| \cdot |x^2 + 2x + 4| + |x-2| < 0.01 \cdot 19 + 0.01 = 0.2$$

כפי שרצינו להוכיח.

◁ מאישוויון המשולש נובע  
 $|a-b| \leq |a| + |b|$  (ראו שאלה 25א).



## סיכום הנוסחאות בכרך א

### חוקי המספרים הממשיים

|                                                      |                                  |
|------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $a + b = b + a$                                      | חוק החילוף בחיבור                |
| $ab = ba$                                            | חוק החילוף בכפל                  |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$                          | חוק הקיבוץ בחיבור                |
| $(ab)c = a(bc)$                                      | חוק הקיבוץ בכפל                  |
| $a(b + c) = ab + ac$                                 | חוק הפילוג                       |
| $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$                 | פתיחת סוגריים (FOIL)             |
| $a + 0 = a$                                          | חוק האיבר הניטרלי בחיבור         |
| $a \cdot 1 = a$                                      | חוק האיבר הניטרלי בכפל           |
| $a \cdot 0 = 0$                                      | חוק הכפל באפס                    |
| $a + (-a) = 0$                                       | חוק האיבר הנגדי                  |
| $a - b = a + (-b)$                                   | חוק החיסור והנגדי                |
| $-a = (-1) \cdot a$                                  | חוק הכפל ב־1                     |
| $\frac{a}{1} = a$                                    | חלוקת מספר ב־1                   |
| $\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$                          | חלוקת מספר בעצמו                 |
| $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$      | כפל שברים                        |
| $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$          | חילוק שברים                      |
| $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a : c}{b : c}$  | הרחבה וצמצום של שברים            |
| $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$    | חיבור וחיסור שברים בעלי מכנה זהה |
| $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ | חיבור וחיסור שברים כלליים        |
| $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$                  | חילוק כפעולת כפל                 |

### נוסחאות הכפל המקוצר

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\bullet (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\bullet a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## חוקי חזקות

$$a^0 = 1, a^1 = a, a^2 = a \cdot a$$

הגדרת החזקות

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n \text{ פעמים } n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

חזקות שליליות

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

חוק חיבור המעריכים

$$(ab)^n = a^n b^n$$

חוק פילוג החזקה מעל הכפל

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

חוק החזקה של חזקה

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

חוק חיסור המעריכים

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

חוק פילוג החזקה מעל חילוק

## נוסחאות הקשורות לבעיות מילוליות

$$v = \frac{s}{t}$$

תנועה במהירות קבועה

$$\text{תפוקה} = \text{קצב} \times \text{זמן}$$

תפוקה בקצב קבוע

## משוואות ריבועיות

$$ax^2 + bx + c = 0$$

הצורה הכללית של משוואה ריבועית

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

נוסחת השורשים

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

נוסחת הפירוק של ביטוי ריבועי

## חוקי השורש הריבועי

התכונות המגדירות את השורש (מוגדר עבור  $a \geq 0$  בלבד):

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a} \geq 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

כפליות השורש

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

שורש של מנה

**הערך המוחלט והמרחק**

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

הגדרת הערך המוחלט

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

אי־שוויון המשולש

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

כפליות הערך המוחלט

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

ערך מוחלט של מנה

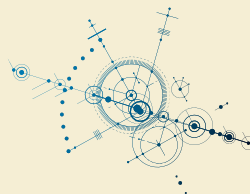
$$|a| \geq 0; \quad |a| = \sqrt{a^2}; \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

תכונות נוספות של הערך המוחלט:

$$d(a, b) = |a - b|$$

מרחק בין שתי נקודות על הישר





סדרת הספרים **מתמטיקה קדם אקדמית**, המלווה את הקורס בשם זה, היא שער כניסה ללימודים אקדמיים בתחומי המתמטיקה והמדעים. היא כוללת את מרבית נושאי המתמטיקה התיכוניים, בגישה שיטתית המעודדת חשיבה עצמאית והבנה תיאורטית.

הספרים מתאימים ללימוד עצמי, ומכילים מאות תרגילים ופתרונותיהם. הם מיועדים בראש ובראשונה לסטודנטים המתכוננים ללימודים אקדמיים בתחומי המדעים, אך מתאימים גם לתלמידי תיכון המעוניינים להעמיק את הבנתם ולכלל המבקשים להשלים את השכלתם המתמטית הבסיסית.

**הכרך הראשון** עוסק באריתמטיקה בסיסית, זהויות ומשוואות אלגבריות ואי־שוויונות, **הכרך השני** בסדרות ואינדוקציה, פונקציות, חזקות ולוגריתמים ומושגים בגיאומטריה, **והכרך השלישי** בטריגונומטריה, גיאומטריה אנליטית וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

**ד"ר גיל אלון** הוא מתמטיקאי וחבר סגל בכיר במחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב באוניברסיטה הפתוחה.

קורס 95003  
מק"ט 95003-2011  
מסת"ב 8-1715-06-978-978  
ISBN 978-965-06-1715-8  
lamda-openubooks.co.il



 למדא - ספרי האוניברסיטה הפתוחה

